TEMA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Definición de Sistema de ecuaciones Lineales:

Se llama sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas al conjunto formado por *m* ecuaciones lineales con las mismas *n* incógnitas en cada una de ellas. Estos sistemas pueden escribirse en la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

donde:

- a_{ij} son los coeficientes del sistema: .
- b_i son los términos independientes: .
- x_i son las incógnitas: .

Clases de sistemas de ecuaciones lineales:

- Según el valor de los términos independientes del sistema, éstos pueden ser:

  Homogéneos: Si todos los términos independientes son nulos.
  No Homogéneos: Si algún término independiente es distinto de cero.

- Según sus soluciones, los sistemas pueden ser:

  Incompatibles: Si no tiene solución.
  Compatibles: Si tienen solución. Estos, a su vez, pueden ser clasificados en:
  - **Determinados:** Si tienen una única solución.
  - **Indeterminados:** Si tienen infinitas soluciones.

Expresiones de los sistemas de ecuaciones lineales:

Llamamos:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matriz de los coeficientes del sistema.

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ matriz ampliada del sistema.

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ matriz de las incógnitas.

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ Matriz de los términos independientes.

Expresión matricial: Con las matrices definidas anteriormente, podemos escribir la expresión matricial del sistema en la forma: $A\cdot X=B$.

Expresión vectorial: Sean A_1 , A_2 , … , A_n , las columnas de la matriz de los coeficientes del sistema *A*, la expresión vectorial del sistema puede escribirse en la forma:

$$A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2+\dots+A_n\cdot x_n=B$$

Teorema de Rouché-Fröbenius:

Un sistema con *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas es compatible si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes del sistema coincide con el rango de la matriz ampliada.

- Si $r(A)\neq r(A^*)\Rightarrow$ el sistema es INCOMPATIBLE.
- Si $r(A)=r(A^*)=r\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE.
  - Si $r=n$ (nº de incógnitas) $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.
  - Si $r\neq n$ (nº de incógnitas) $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Métodos de Resolución de Sistemas:

- **Método de Gauss:** Consiste en hacer ceros por debajo de la diagonal principal del sistema.
- **Método de la Matriz Inversa:** Hemos visto que un sistema en forma matricial puede escribirse en la forma $A\cdot X=B$. Si despejamos la matriz de las incógnitas *X*, tendríamos que: $X=A^{-1}\cdot B$.
- **Regla de Cramer:** Se llama sistema de Cramer a los sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones y de incógnitas $m=n$, y cuyo determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es no nulo: $|A|\neq 0$ (es decir, los sistemas de Cramer son siempre compatibles determinados). La solución única de un sistema de Cramer se obtiene,

para cada una de las incógnitas, dividiendo el determinante que resulta de sustituir en la matriz de los coeficientes del sistema, la columna que corresponde a los coeficientes de la incógnita que se quiere calcular, por la columna de los términos independientes, entre el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema.

Por ejemplo, para una sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas la Regla de Cramer queda:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{array}\right\}$$ Las soluciones se hallan, del modo siguiente:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad ; \quad x=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Sistemas Homogéneos:

Los sistemas que denominamos **homogéneos** son un caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales. Son aquellos en los que todos los términos independientes son nulos.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right\}$$

Una de las características principales de los sistemas homogéneos es que son siempre sistemas **compatibles**, ya que siempre tendrán como solución la denominada **solución trivial**, que es la solución en la que todas las incógnitas son cero: $x_1=0$, $x_2=0$, … , $x_n=0$. Esto significa que en estos tipos de sistemas, el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es siempre igual al rango de la matriz ampliada. Por tanto, tendremos:

Sea $r(A)=r(A^*)=r$ y n=nº de incógnitas:

- $r=n$ ⇒ El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (Solución Trivial $x_i=0$).
- $r\neq n$ ⇒ El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones, incluida la trivial).