Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2016

Problema 1 Dada la función:

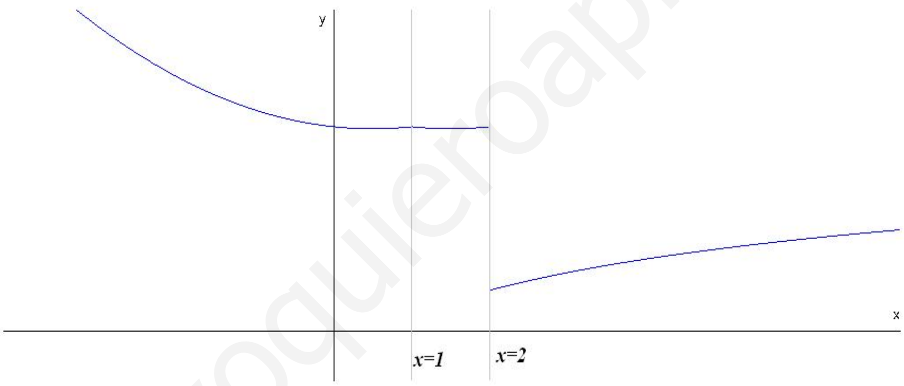
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 25 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

Solución:



a) Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x^2 - x + 25) = 25$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2}) = 25$$

$$f(1) = 25$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.
Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2}) = 25$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} (\frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5}) = 5$$

Luego $f(x)$ es discontinua no evitable en $x = 2$, hay un salto.

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{5(2x-3)}{\sqrt{2x^2-6x+29}} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{10x}{(x^2+1)\ln 5} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = -1$ luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 2$: No puede ser derivable ya que no es continua.
En resumen, la función es continua en $R-\{2\}$ y derivable en $R-\{1, 2\}$.

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - ax + 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 2) = b - a + 2$$

$$2a - b + 1 = b - a + 2 \Longrightarrow 3a - 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \;\; f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 4a - b = 2b - a \Longrightarrow 5a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 5a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -6x^2 + 5x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -5x^2 + 3x + 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -12x + 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ -10x + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-12 - 1}{2} = -\frac{13}{2}$$

Si $c < 1$: $f'(c) = -12c + 5 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c = \frac{23}{24}$ solución válida. Si $c \ge 1$: $f'(c) = -10c + 3 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c = \frac{19}{20}$ solución no válida.

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha}{x^2+1}$, se pide:

a) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.

c) Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2x(1-\alpha)}{(x^2+1)^2}$

$$b = f(1) = \frac{1+\alpha}{2}, \quad m = f'(1) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$y - \frac{1+\alpha}{2} = \frac{1-\alpha}{2}(x-1)$$

b) $m = 0 \Longrightarrow 1-\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$

c) Si $\alpha = 2$ tenemos $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

- $\text{Dom}(f) = R$, es una función par, con corte con OY en $(0,2)$ y siempre positiva.
- Asíntotas: No tiene verticales, tiene una horizontal en $y = 1$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2+1} = 1$ y por tanto no hay oblicuas.
- Monotonía: $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

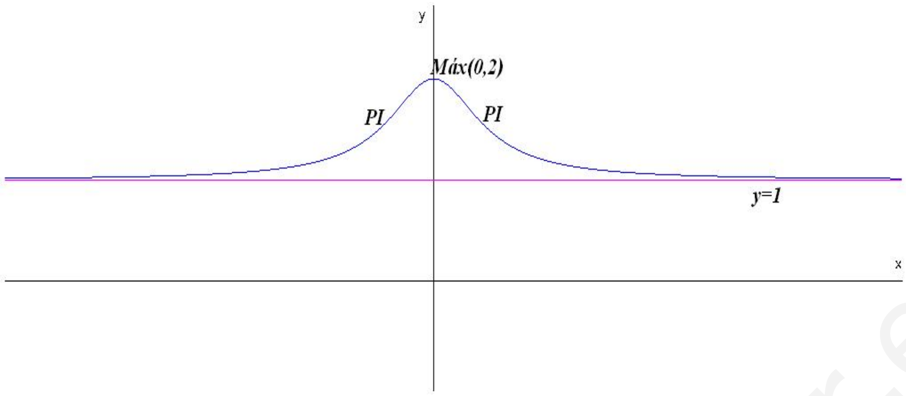
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$.

- $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
Convexa: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



Problema 4 Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

a) Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abcisa $x = 2/3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.

b) ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Solución:

a)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(2/3) = 0 \Longrightarrow 4 + 2a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

b)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f''(x) = 6x - 4$$

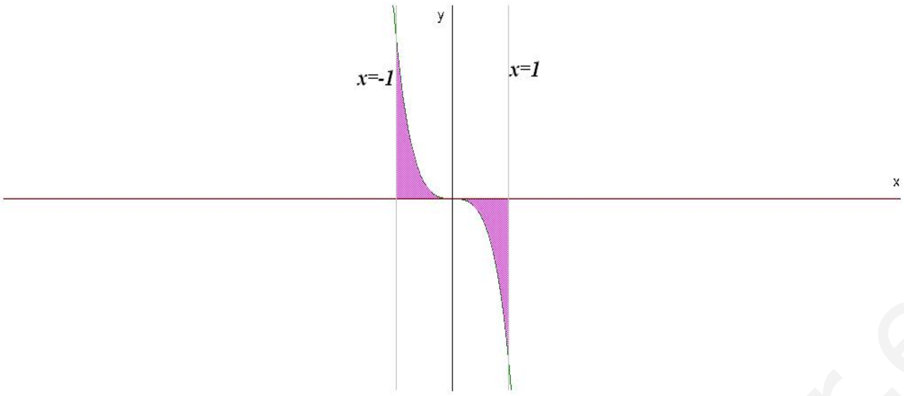
$f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo.

Problema 5 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
Solución:

$$\frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 0, y otra S_2 entre 0 y 1 (ambas son iguales, la función es impar).

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 4}\, dx = \int \left(x + \frac{4x}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2 - 4|$$



$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = -\frac{1}{2} - 2\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} + 2\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -\frac{1}{2} - 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} - 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) = -1 - 4\ln\left(\frac{3}{4}\right)\ u^2 = 0,151\ u^2$$