REPRESENTACIÓN DE CURVAS

Esquema

Para representar gráficamente una función se debe estudiar:

1. Dominio
2. Puntos de corte con los ejes coordenados
3. Paridad y periodicidad
4. Asíntotas
5. Monotonía
6. Curvatura

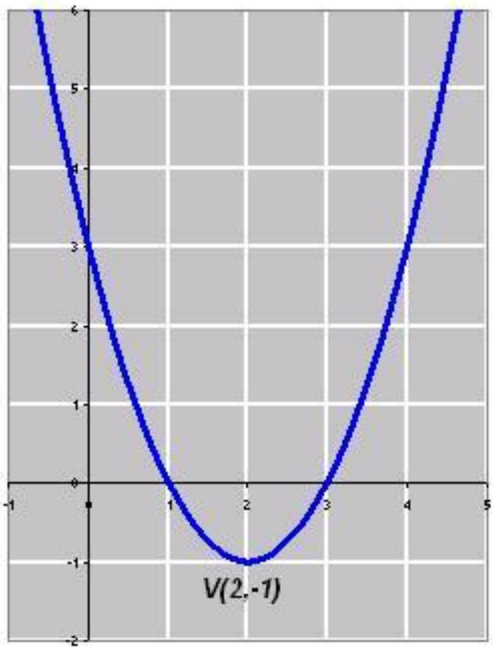
Función polinómica de segundo grado.

Su gráfica es una parábola. Para representarla basta con hallar los puntos de corte a los ejes y el vértice que es siempre un máximo o un mínimo. Si el coeficiente de x^2 es positivo la parábola es cóncava positiva y si es negativo es cóncava negativa.

Cuando no existen puntos de corte con el eje de abscisas podemos ayudarnos con una sencilla tabla de valores.

Ejemplo 1

Gráfica $y = x^2 - 4x + 3$



Puntos de corte a los ejes:

- Para $x = 0$, $y = 3 \Rightarrow$ La función corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 3)$
- Para $y = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte al eje de abscisas son (3, 0) y (1, 0)

Vértice: $y = x^2 - 4x + 3$; $y' = 2x - 4$; $y'' = 2$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. El eje de simetría de la parábola es la recta x = 2.

Para $x = 2$, $y(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$

$V(2,-1)$. El vértice es un mínimo ya que la segunda derivada es positiva.

La función es decreciente en el intervalo (-∞, 2) y creciente en (2, +∞)

Ejemplo 2.

Gráfica $y=\left|x^2-3x+2\right|$

Se trata de una función valor absoluto que se expresa de la forma siguiente:

$$y=\left|x^2-3x+2\right|=\begin{cases}x^2-3x+2 & si\quad x^2-3x+2\geq 0\\ -x^2+3x-2 & si\quad x^2-3x+2<0\end{cases}=\begin{cases}x^2-3x+2 & si\quad x\geq 1\ ó\ x\geq 2\\ -x^2+3x-2 & si\quad 1<x<2\end{cases}$$

Para representarla se dibujan las gráficas de

$y=x^2-3x+2$; $y=-x^2+3x-2$

Después nos quedamos con la parte de la gráfica situada por encima del eje de abscisas.

Estudio de la primera función: $y=x^2-3x+2$

Para x = 0, y = 2. Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 2)

Para y = 0, $x^2-3x+2=0\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$

Corta al eje de abscisas en los puntos (2, 0) y (1, 0)

Vértice:

$y=x^2-3x+2$

$y'=2x-3;\ \ 2x-3=0\Rightarrow x=3/2$

Para $x=3/2$, $y(3/2)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-3.\dfrac{3}{2}+2=-\dfrac{1}{4}$ El vértice es el punto $V\left(3/2,-1/4\right)$

Estudio de la segunda función: $y=-x^2+3x-2$

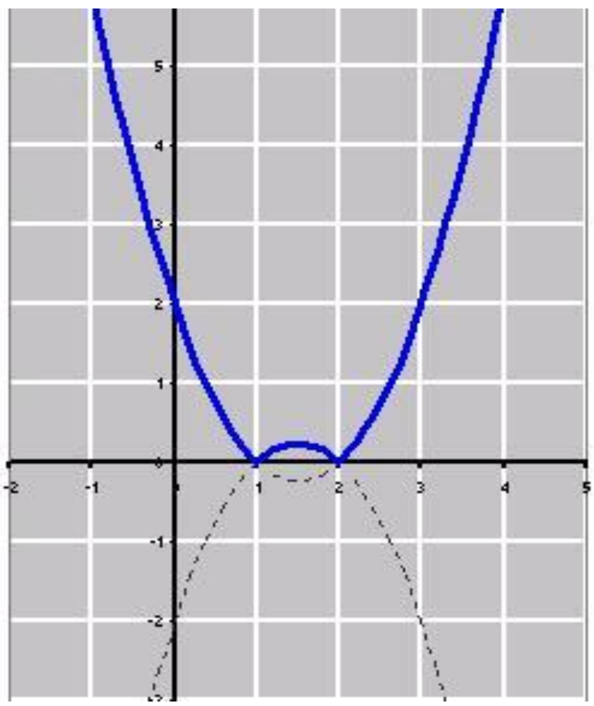
Para x = 0, y = -2   Corta al eje de ordenadas en el punto (0, -2)

Para y = 0, $-x^2+3x-2=0\Rightarrow$x = 2; x = 1

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los mismos que antes (2, 0) y (1, 0)

Vértice: $y=-x^2+3x-2$; $y'=-2x+3; -2x+3=0\Rightarrow x=3/2$

Para $x=3/2$, $y(3/2)=-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3.\dfrac{3}{2}-2=\dfrac{1}{4}$ El vértice es el punto $V'\left(3/2,1/4\right)$



La función es decreciente en los intervalos (-∞, 1) y (3/2, 2)

Es creciente en (1, 3/2) y (2, +∞).

Tiene un máximo relativo en $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ y dos mínimos relativos en (1,0) y (2,0).

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no es derivable en x=1 y x=2 (puntos angulosos)

Funciones polinómicas en general

Se siguen los siguientes pasos:

1. Dominio: $Domf = \mathbb{R}$. El dominio de toda función polinómica es siempre $\mathbb{R}$.
2. Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
3. Paridad y periodicidad
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos
5. Concavidad. Puntos de inflexión.

Nota: las funciones polinómicas no tienen asíntotas

Ejemplo 3.

Gráfica $y = x^3 - 9x$

1.- Dominio: El dominio es $\mathbb{R}$; Dom(f) = $\mathbb{R}$

2.- Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

Para x = 0, y = 0

Para y = 0, $x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

Los puntos de corte son (0, 0), (3, 0) y (-3, 0).

3.- Paridad:

$f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x = -f(x)$ impar (simétrica respecto del origen)

4.- Crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = 3x^2 - 9 ; \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Intervalos	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
Signo de y’	+	-	+
Función	↗	↘	↗

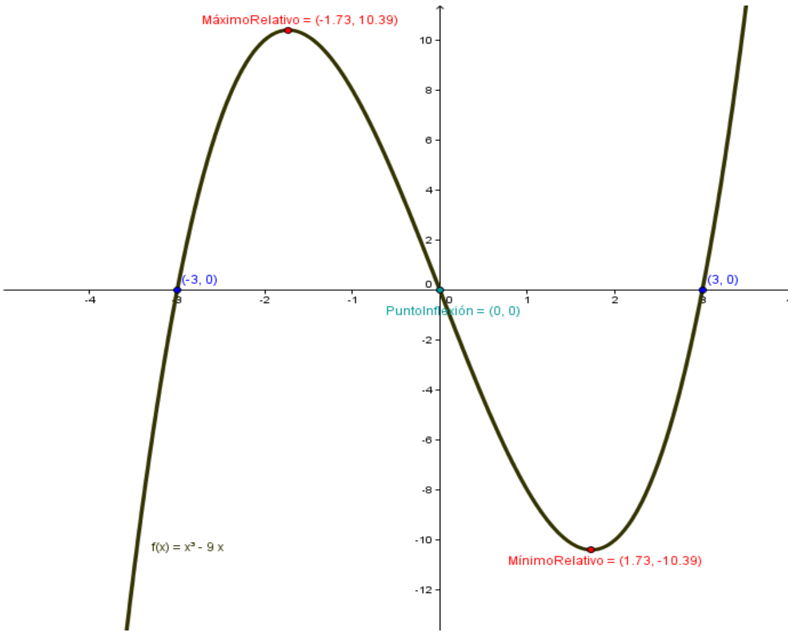
Para $x = -\sqrt{3}$ $\exists$ Máximo relativo $(-\sqrt{3},\ 6\sqrt{3})$;

Para $x = \sqrt{3}$ $\exists$ Mínimo relativo $(\sqrt{3},\ -6\sqrt{3})$

5.- Curvatura: $f''(x) = 6x$;6x = 0 $\Rightarrow$ x = 0.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de y’’	-	+
Función	∩	∪

Para x = 0, existe punto de inflexión (0, 0)



Funciones racionales

Ejemplo 4

Gráfica $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1.- Dominio: x – 1 = 0 $\Rightarrow$ x = 1 $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

2.- Cortes con los ejes

Para x = 0, y = -2

Para y =0, $x^2-2x+2=0$ (que no tiene sol real.)

Único punto de corte: (-2, 0)

3.- Paridad y simetría: no tiene

4.- Asíntotas:

- Horizontales: No hay
- Verticales: posible $x=1$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\left(\dfrac{1}{0} in\det.signo\right)=\pm\infty$ luego x=1 A.V.

  Posición relativa.

  $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\left(\dfrac{1}{0^-}\right)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\left(\dfrac{1}{0^+}\right)=+\infty$

- Oblicuas: $y=mx+n$; $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x}=1$

  $n=\lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+2}{x-1}=-1$; $y=x-1$ A.O.

  Posición Relativa.

  Para x=-100 f(-100) < a(-100) la función está por debajo de la asíntota.

  Para x=100 f(100) > a(-100) la función está por encima de la asíntota.

5.- Crecimiento y decrecimiento: $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $y'=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow$x = 0; x = 2

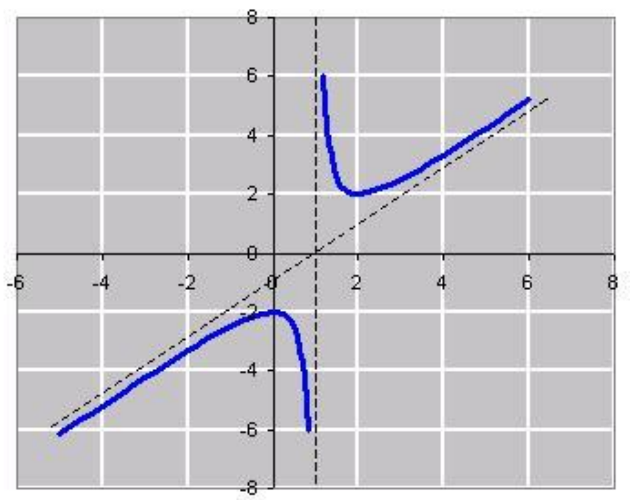
	(-∞, 0)	(0, 1)	(1, 2)	(2, +∞)
y'	+	-	-	+
y	↗	↘	↘	↗

Para x = 0, ∃ máximo relativo

Para x = 2, ∃ mínimo relativo

6.- Concavidad: $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}$; y'' no se anula nunca.

	(-∞, 1)	(1, +∞)
y''	-	+
y	∩	∪



No tiene puntos de inflexión.

Ejemplo 5

Gráfica $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

1.-Dominio: $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$; No hay soluciones reales. $Dom(y)=R$

2.- Puntos de corte: Para x = 0, y = 0; Para y = 0, x = 0. Único punto de corte: (0, 0)

3.-Paridad: $f(-x)=f(x)$ y por tanto par (simétrica respecto de OY)

4.-Asíntotas:

- Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$ luego y = 1 es una A.H.
  Posición relativa. Para x=100 f(100) <1 y para x=-100 f(-100) < 1, en ambos casos la función está por debajo de la asíntota
  Nota: Si hay horizontales lo son por la derecha y por la izquierda
- Verticales: No hay porque el denominador no se anula
- Oblicuas: No hay.

5.- Crecimiento y decrecimiento: $y'=\dfrac{2x(x^2+1)-2x.x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Si hacemos $y'=0$ entonces 2x = 0 ⇒ x = 0

Para x = 0, ∃Mínimo relativo (0, 0)

	(-∞, 0)	(0, +∞)
y'	-	+
y	↘	↗

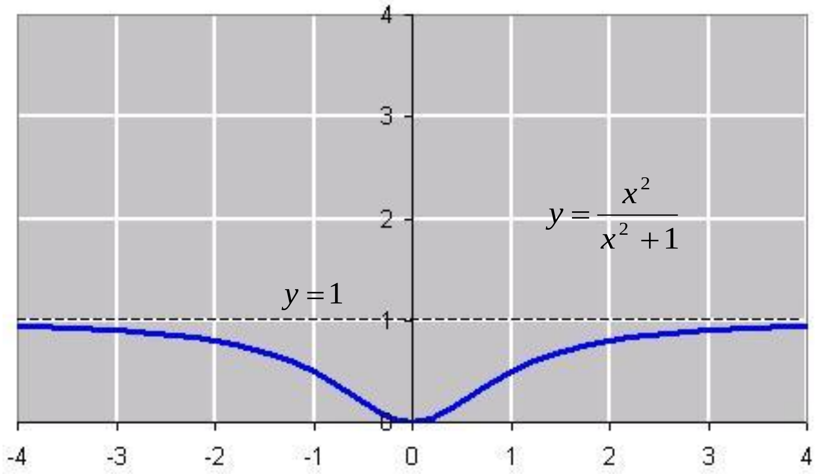
6.- Concavidad:

$$y''=\frac{2(x^2+1)^2-2(x^2+1).2x2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

Si hacemos $y''=0$, $2-6x^2=0 \Rightarrow x=\pm\,{}^{1}\!/_{\sqrt{3}}$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$
y''	-	+	-
y	∩	∪	∩

Existen puntos de inflexión para $x=-{}^{1}\!/_{\sqrt{3}}$ y para $x={}^{1}\!/_{\sqrt{3}}$



Ejemplo 6

Gráfica $y = \frac{2x-3}{x+5}$

La gráficas de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, siendo $c \neq 0$, son siempre hipérbolas y para representarlas podemos omitir el método general de representación de funciones racionales.

Basta con hallar los puntos de corte y las asíntotas.

Puntos de corte:

Para $x = 0$, $y = -3/5$

Para $y = 0$, $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$

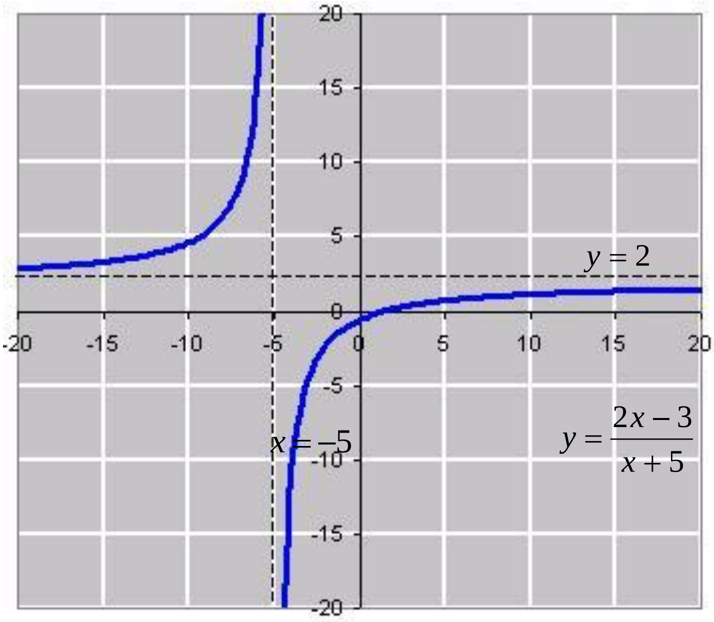
Los puntos de corte son $(0, -3/5)$ y $(3/2, 0)$

Asíntotas:

Asíntota vertical: x = -5

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+5} = 2$;$y = 2$ es una asíntota horizontal

Con las dos asíntotas dibujadas aparecen unos nuevos ejes. La curva ocupará primero y tercer cuadrante, o bien segundo y cuarto. Los puntos de corte hallados nos indican los que hemos de elegir. En este caso, segundo y cuarto.



Observando la gráfica vemos que siempre es creciente. No hay máximos ni mínimos.

Es cóncava positiva en $(-\infty, -5)$ y cóncava negativa en $(-5, +\infty)$. No hay puntos de inflexión porque aunque en el punto $x = -5$, pasa de cóncava positiva a cóncava negativa, dicho punto no es de su dominio.

Ejemplo 7

Gráfica $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

1.- Dominio: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1; Dom(y)=R-\{-1,1\}$

2.-Puntos de corte: Para x = 0, y = -1 Un punto de corte es *(0,-1)*

Para y = 0, $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2+1=0$ .No hay solución, no hay más puntos de corte.

3.-Paridad: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=f(x)$ Par. Simétrica respecto de OY

4.- Asíntotas:

- Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$; y = 1 es una A.H. Asíntotas oblicuas no hay.

  Posición relativa. Para x=100 f(100) >1 y para x=-100 f(-100) > 1, en ambos casos la función está por encima de la asíntota
- Verticales: Las posibles son x=-1 y x=1.

  $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{2}{0}\text{Indet.Signo}\right)=\pm\infty$ A.V en x=-1.

  Posición relativa. $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{2}{0^+}\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{1}{0^-}\right)=-\infty$

  Por simetría x=1 es una A.V.

5.- Crecimiento y decrecimiento: $y'=\dfrac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$.

Si hacemos $y'=0, -4x=0 \Rightarrow x=0$

	(-∞, -1)	(-1, 0)	(0, 1)	(1, +∞)
y'	+	+	-	-
y	↗	↗	↘	↘

Para x = 0, existe máximo

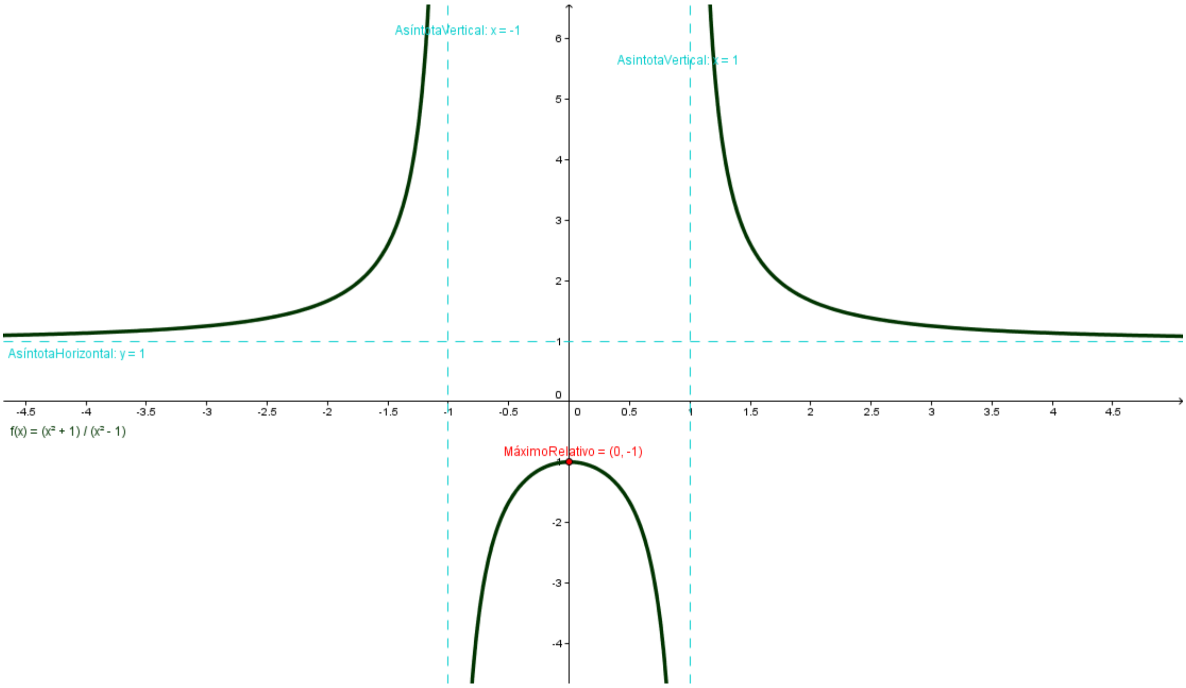
6.- Concavidad :

$$y''=\frac{-4(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x(-4x)}{(x^2-1)^4}=\frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{4+12x^2}{(x^2-1)^3}$$

Si hacemos $y''=0$ entonces $4+12x^2=0$ que no tiene solución.

	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
y''	+	-	+
y	∪	∩	∪

No tiene puntos de inflexión.



Ejemplo 8

Gráfica $y=\left|\dfrac{x^2+x}{x-1}\right|$

Hacemos primero la representación de la función: $y=\dfrac{x^2+x}{x-1}$

1.- Dominio: $Domf=\mathbb{R}-\{1\}$

2.- Cortes con los ejes: $\left[\begin{array}{l} \text{con OX: y=0} \Rightarrow \text{x}^2\text{+x}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad (0,0) \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad (-1,0) \end{cases} \\ \text{con OY: } x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0) \end{array}\right.$

3.- Paridad: no tiene simetrías.

4.- Asíntotas:

- Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x-1}=\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{x-1}=-\infty$ no hay.
- Verticales: posible x=1. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x}{x-1}=\left(\dfrac{2}{0^-}\right)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x}{x-1}=\left(\dfrac{2}{0^+}\right)=+\infty$
- Oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=1 \qquad n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2$.

  y=x+2 es una asíntota oblicua (por la dcha. y por la izda.)

  Posición relativa:

  Para x=100 $\quad f(100)=\dfrac{10100}{99}\approx102.02 \qquad a(100)=100+2=102\Rightarrow f(100)>a(100)$

  La función está por encima de la asíntota.

  Para x=-100 $\quad f(-100)=\dfrac{9900}{-101}\approx-98.02 \qquad a(-100)=-100+2=-98\Rightarrow f(-100)<a(-100)$

  La función está por debajo de la asíntota.

5.- Monotonía.

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

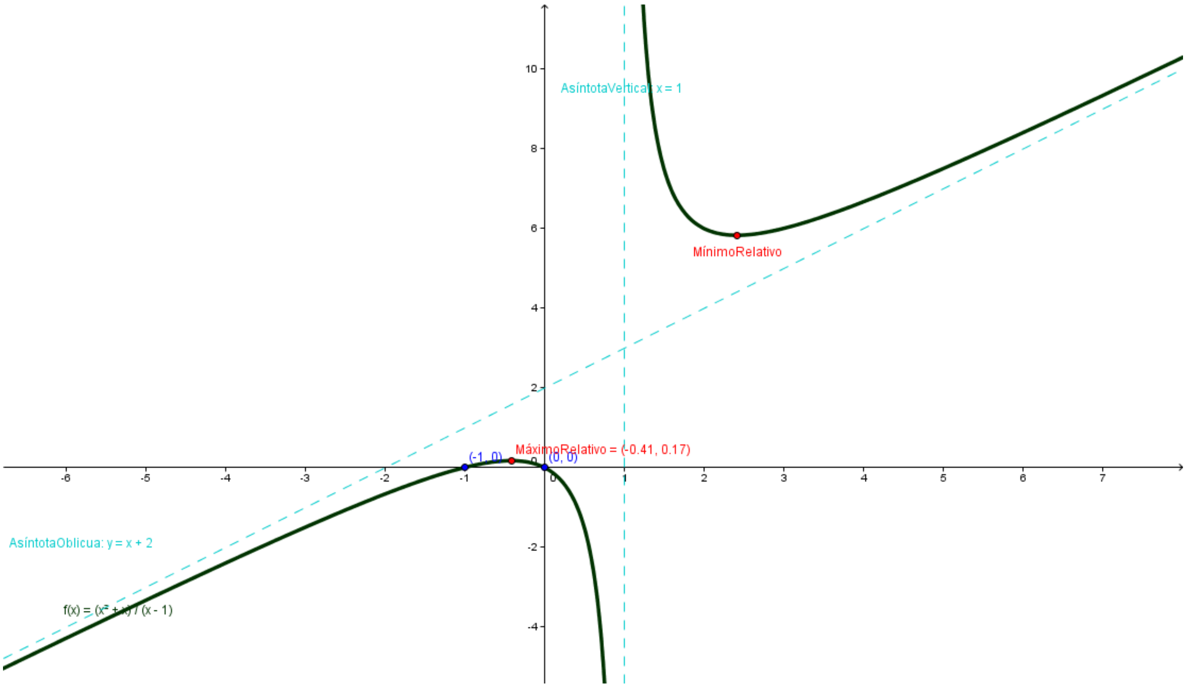
$$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow 1 \pm \sqrt{2} \quad \textit{posibles extremos relativos}$$

$$-\infty \xleftrightarrow[\text{CRECIENTE}]{y'>0} \underset{\text{MÁXIMO RELATIVO}}{1-\sqrt{2}} \xleftrightarrow[\text{DECRECIENTE}]{y'<0} 1 \xleftrightarrow[\text{DECRECIENTE}]{y'<0} \underset{\text{mÍNIMO RELATIVO}}{1+\sqrt{2}} \xleftrightarrow[\text{CRECIENTE}]{y'>0} +\infty$$

6.- Curvatura

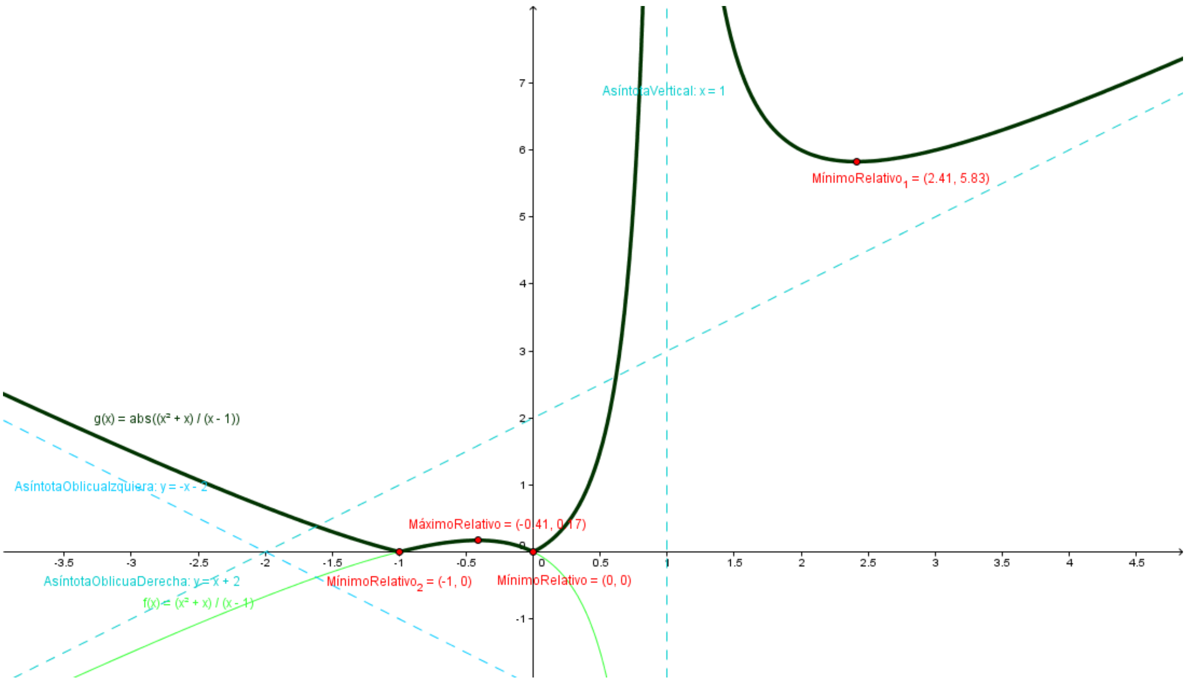
$$y'' = \frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow y'' = 0 \ \textit{no tiene solución.}$$

$$-\infty \xleftrightarrow[\text{CONCAVA NEGATIVA}]{y''<0} 1 \xleftrightarrow[\text{CONCAVA POSITIVA}]{y''>0} +\infty$$



Pasamos a graficar su valor absoluto

$$y = \left| \frac{x^2 + x}{x - 1} \right|$$



Funciones logarítmicas.

Los pasos a seguir son los mismos que en las racionales pero en el dominio hemos de tener en cuenta que el logaritmo de los números negativos no existe. En los límites se cuidará si la tendencia es por la derecha o por la izquierda.

Ejemplo 9

Gráfica $y=\dfrac{\ln x}{x}$

1.- Dominio: Globalmente es una función racional, luego el punto donde se anula el denominador, $x=0$, no es de su dominio. Además, como figura lnx, ha de ser $x>0$, por tanto, $Dom(y)=(0,+\infty)$

2. Puntos de corte: Para x = 0, la función no está definida.

Para y = 0, lnx = 0⇒x = 1. El único punto de corte es (1, 0)

3.- Asíntotas:

- Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\, Indet.\right)\underset{L'Hôpital}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $y=0$ es una A.H. derecha.

  Posición relativa. Para x=100 f(100)>0 luego la función está por encima de la A.H.

- Verticales: Posible $x=0^+$. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{-\infty}{0}\right)=-\infty$ luego x=0 es una A.V.

- Oblicuas: $y=mx+n$; $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$. No hay.

4.- Monotonía: $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$;

Si $y'=0$ entonces $1-\ln x=0$ $\ln x=1 \Rightarrow x=e$

Para x=e, existe un máximo relativo $M\left(e,1/e\right)$

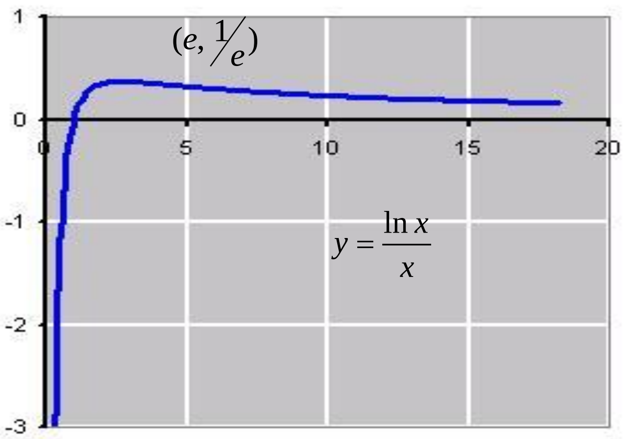
	(0, e)	(e, +∞)
y'	+	-
y	↗	↘

5.- Concavidad : $y''=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$;

Si $y''=0$, -3 + lnx = 0 ⇒ $\ln x=3/2$; $x=e^{3/2}$

Para $x=e^{3/2}$ existe un punto de inflexión

	$\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{3}{2}},\infty\right)$
y''	-	+
y	∩	∪



Ejemplo 10 Gráfica $y = \dfrac{x}{\ln x}$

1.- Dominio: Por ser parte de la función logarítmica, x > 0.
Por ser globalmente racional $\ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Es decir, $Domf = (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$

2.- Puntos de corte: Para $x = 0 \notin Domf$. Para y = 0, $\dfrac{x}{\ln x} = 0 \Rightarrow$ x = 0 pero $x = 0 \notin Domf$

No hay puntos de corte.

3- Asíntotas:

- Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ (No hay)
- Verticales: posible x = 1
  $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{\ln x} = \left(\dfrac{1}{0} \text{indet. de signo}\right) = \pm\infty$ tiene asíntota vertical en x=1
  Posición relativa: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = \left(\dfrac{1}{0^-}\right) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln x} = \left(\dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty$
- Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}/Lx}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ (No hay)

4.- Monotonía:

$y' = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$; Si $y' = 0$, Lnx – 1 = 0 ⇒Lnx = 1 es decir, x = e.

	(0, 1)	(1, e)	(e, +∞)
y'	-	-	+
y	↘	↘	↗

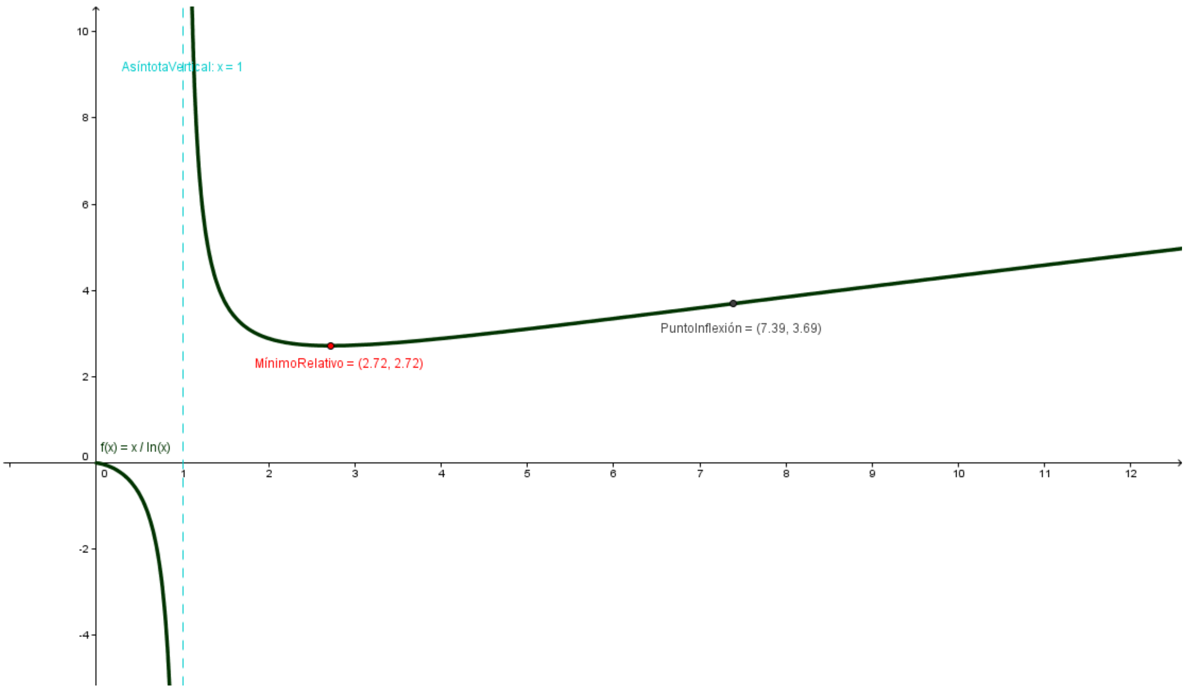
Para x = e, ∃ mínimo relativo M(e, e)

5.- Concavidad:

$y'' = \dfrac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$; Si $y'' = 0$, $2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

	(0, 1)	(1, e^2)	(e^2. +∞)
y''	-	+	-
y	∩	∪	∩

Para x = 1, pasa de cóncava positiva a negativa pero el punto no es del dominio de la función.
Para x = e^2 pasa de cóncava negativa a positiva.
Hay un punto de inflexión en dicho punto



Ejemplo 11 *Gráfica* $y = x^2 \cdot \ln x$

1.- Dominio: al ser un logaritmo x>0 $\Rightarrow Domf = (0,\infty)$

2.- Cortes con los ejes: $\begin{cases} \text{con OX: y=0} \Rightarrow x^2 \cdot \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin Domf \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \\ \text{con OY: } x = 0 \Rightarrow \text{no pertenece al dominio} \end{cases}$

3.- Paridad: no tiene simetrías.

4.- Asíntotas:

- Horizontales. Solo puede haber por la derecha $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \ln x = \infty \cdot \infty = \infty$ no hay.
- Verticales: posible x=0. No consideraremos $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 \cdot \ln x$ por no estar definido en el dominio de definición.

  $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \cdot \ln x = \left(0 \cdot \ln 0^+ = 0 \cdot (-\infty)\, in\det.\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \left(\dfrac{-\infty}{\infty}\, In\det.\right) \underset{L'Hôpital}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{x^2}{2} = 0$ no tiene asíntotas verticales.
- Oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln x = \infty \cdot \infty = \infty$. No tiene sentido hallar el límite cuando $x \to -\infty$. No tiene asíntotas oblicuas

5.- Monotonía.

$y' = 2x\ln x + x^2 \dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$

$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin Domf \\ 2\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ posible extremo relativo

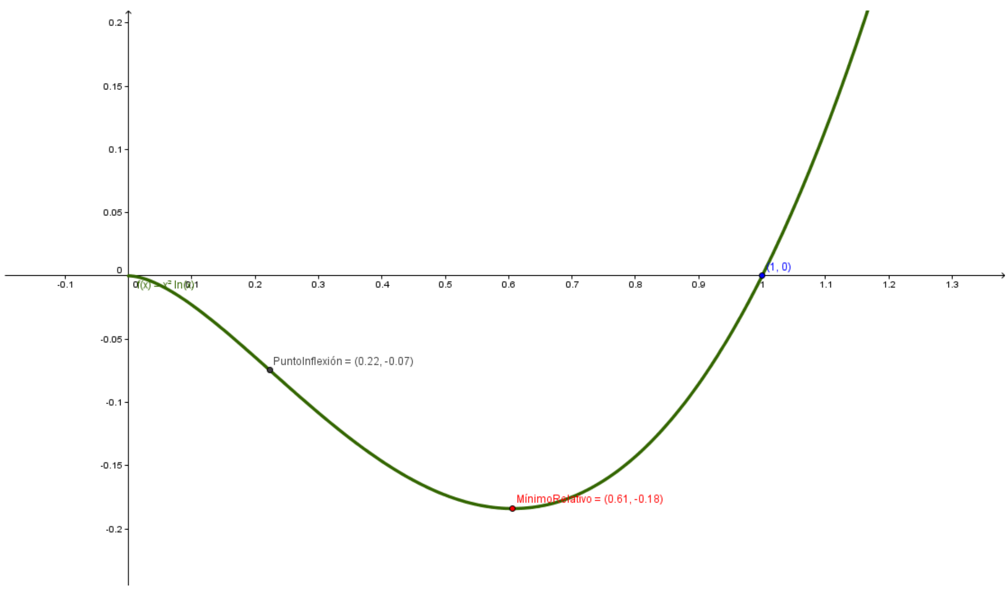
$0 \xleftarrow[DECRECIENTE]{y'<0} \underset{MINIMO}{e^{-\frac{1}{2}}} \xleftarrow[CRECIENTE]{y'>0}$ Mínimo relativo para $x = e^{-\frac{1}{2}}$ $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\dfrac{1}{2e}\right)$

6.- Curvatura

$y'' = 1 \cdot (2\ln x + 1) + x\dfrac{2}{x} = 2\ln x + 3$

$y'' = 0 \Rightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Rightarrow \ln x = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$ posible punto de inflexión

$0 \xleftarrow[CONCAVA\ \ NEGATIVA]{y''<0} \underset{PUNTO\ DE\ INFLEXIÓN}{e^{-\frac{3}{2}}} \xleftarrow[CONCAVA\ POSITIVA]{y''>0}$ $P.I.$ para $x = e^{-\frac{3}{2}}$ $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\dfrac{3}{2e^3}\right)$



Funciones exponenciales.

Ejemplo 12

Gráfica $y = xe^x$

1.- Dominio: La función dada es el producto de una polinómica (de dominio R) y de la exponencial natural (de dominio R), por tanto, *Dom(y) = R*

2.- Puntos de corte: Para *x = 0, y = 0*; Para *y = 0, x = 0.* Único punto de corte *(0, 0)*

3.- Asíntotas:

- Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x} = 0$, luego $y = 0$ es una asíntota horizontal por la izquierda
- Verticales: No hay
- Oblicuas: Solo puede haber por la derecha $y = mx + n$; $m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$; No hay.

4.- Monotonía: $y' = e^x(x+1)$; Si hacemos $y' = 0$, $e^x(x+1) = 0 \Rightarrow$ x = -1

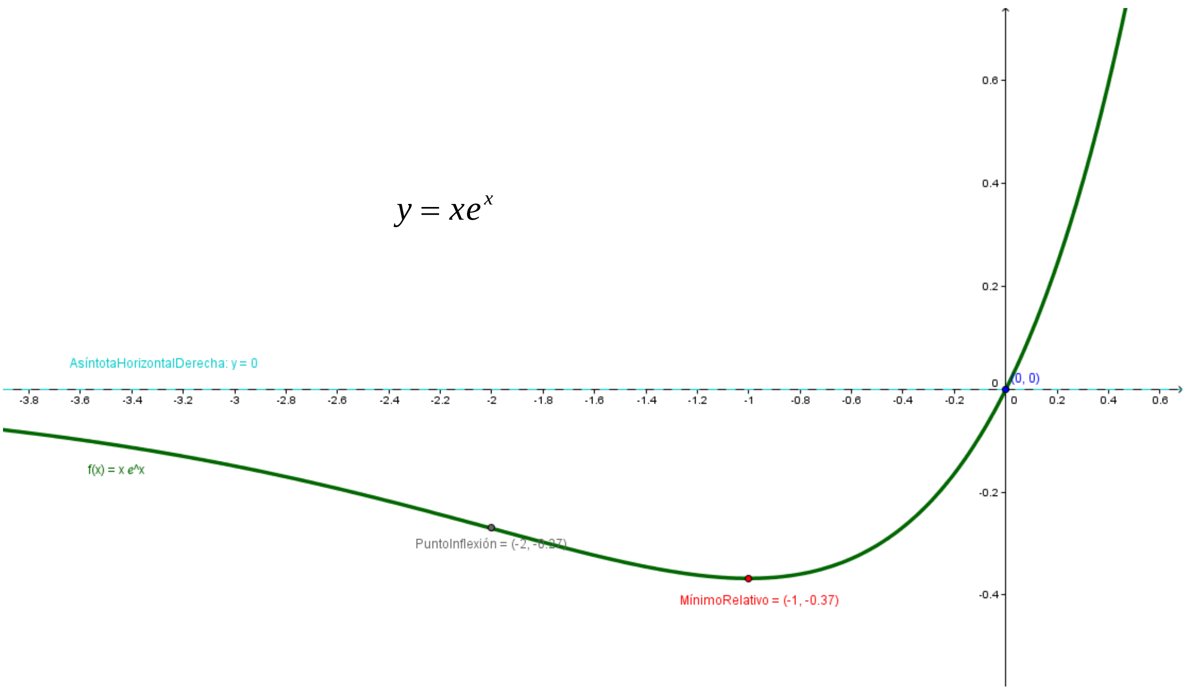
	(-∞,-1)	*(-1, +∞)*
y'	-	+
y	↘	↗

Para x = -1 existe mínimo $M\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$

5.- Concavidad : $y'' = e^x(x+2)$; Si hacemos $y'' = 0$, $e^x(x+2) = 0 \Rightarrow$ x = -2

	(-∞,-2)	*(-2, +∞)*
y''	-	+
y	∩	∪

Para x = -2 existe punto de inflexión $I\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$



Ejemplo 13

Gráfica $y=(x-1)^3 \cdot e^x$

1.-Dominio. $Domf=\mathbb{R}$

2.- Cortes con los ejes: $\left[\begin{array}{l} \text{con OX: y=0} \Rightarrow (\text{x-1})^3 \cdot \text{e}^x=0 \Rightarrow \begin{cases}(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1 \\ e^x=0 \Rightarrow \textit{no tiene solución}\end{cases} (1,0) \\ \text{con OY: } x=0 \Rightarrow y=e^0 \cdot (0-1)^3=-1 \Rightarrow (0,-1)\end{array}\right.$

3.- Paridad: no tiene simetrías.

4.- Asíntotas:

- Horizontales.

  $\odot \lim_{x\to\infty}(x-1)^3 \cdot \text{e}^x=\infty\cdot\infty=\infty$ no hay A.H. por la derecha

  $\odot \lim_{x\to-\infty}(x-1)^3 \cdot \text{e}^x=\lim_{t\to\infty}(-t-1)^3 \cdot \text{e}^{-t}=(-\infty\cdot 0 \; in\det.)=\lim_{t\to\infty}\frac{(-t-1)^3 \cdot}{\text{e}^t}=\left(\frac{-\infty}{\infty} In\det.\right) \underset{L'Hôpital}{=}$

  $\underset{L'Hôpital}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{-3(-t-1)^2}{\text{e}^t}=\left(\frac{-\infty}{\infty} In\det.\right) \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{6(-t-1)}{\text{e}^t}=\left(\frac{-\infty}{\infty} In\det.\right) \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{-6\cdot}{\text{e}^t}=0$

  y=0 es una A.H. por la izquierda.

  Posición relativa:

  Para x=-100 $f(-100)=-3.83x10^{-38}<0 \Rightarrow$ la función está por debajo de la A.H.

- Verticales: No tiene.
- Oblicuas: Solo puede haber por la derecha.

  $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3 \cdot e^x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty} In\det.\right) \underset{\substack{\text{orden del infinito del numerador>} \\ \text{>orden del infinito del denominador}}}{=} \infty$

  No tiene asíntotas oblicuas

5.- Monotonía.

$y'=e^x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2)$

$y'=0 \Rightarrow \begin{cases} e^x=0 \Rightarrow \text{no tiene solución} \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ posible extremo relativo} \\ \text{x+2=0} \Rightarrow \text{x=-2 posible extremo relativo}\end{cases}$

$\xrightarrow[\text{DECRECIENTE}]{y'<0} -2 \xleftrightarrow[\text{CRECIENTE}]{y'>0} \underset{\text{MINIMO}}{1} \xleftarrow[\text{CRECIENTE}]{y'>0}$

Mínimo relativo para $x=-2$ $\left(-2,-\frac{27}{e^2}\right)$

6.- Curvatura

$y''=e^x \cdot (x-1)(x^2+4x+1)$

$y''=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ posible punto de inflexión} \\ x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3} \text{ posibles puntos de inflexión}\end{cases}$

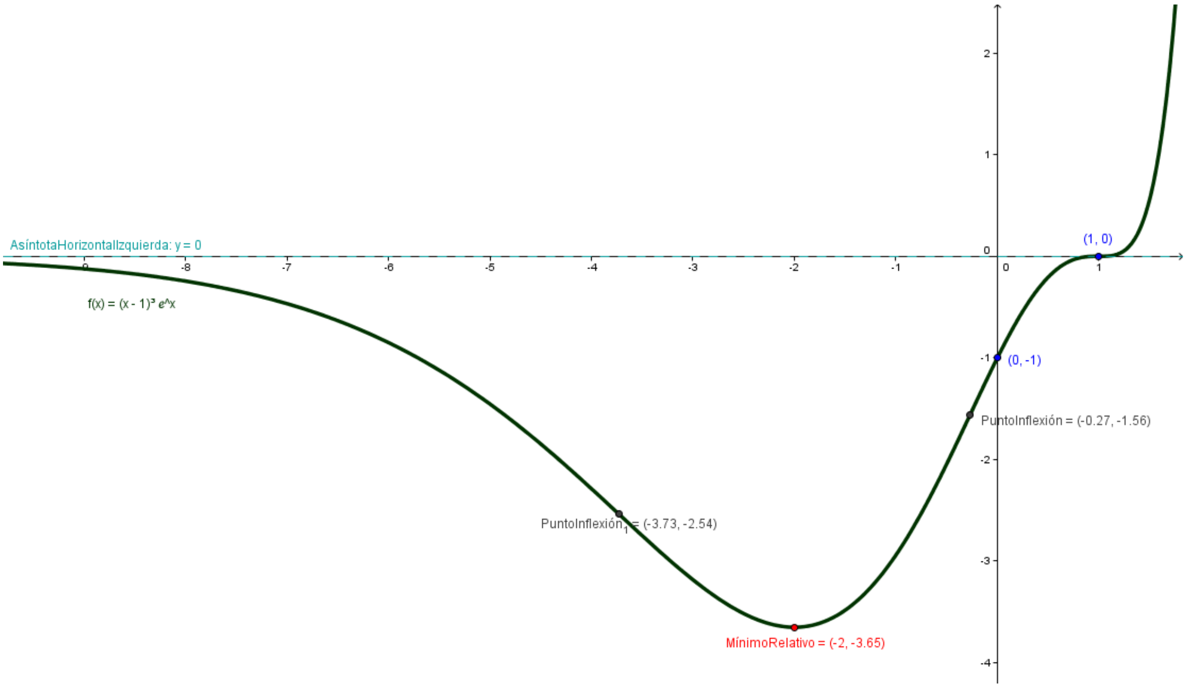
$\xrightarrow[\text{CONCAVA NEGATIVA}]{y''<0} \underset{P.I.}{-2-\sqrt{3}} \xleftrightarrow[\text{CONCAVA POSITIVA}]{y''>0} \underset{P.I.}{-2+\sqrt{3}} \xleftrightarrow[\text{CONCAVA NEGATIVA}]{Y''<0} \underset{P.I.}{1} \xleftarrow[\text{CONCAVA POSITIVA}]{y''>0}$

Tenemos tres puntos de inflexión

$\left(-2-\sqrt{3}, f\left(-2-\sqrt{3}\right)\right) \approx (-4.73,-2.54)$

$\left(-2+\sqrt{3}, f\left(-2+\sqrt{3}\right)\right) \approx (-0.27,-1.56)$

$(1,0)$ que es un P.I. con tangente horizontal (recordar que se anula la 1ª derivada)


AsíntotaHorizontalIzquierda: y = 0
f(x) = (x - 1)³ e^x
(1, 0)
(0, -1)
PuntoInflexión = (-0.27, -1.56)
PuntoInflexión_1 = (-3.73, -2.54)
MínimoRelativo = (-2, -3.65)

Funciones irracionales

Ejemplo 14

Gráfica $y = +\sqrt{x-1}$

1.- Dominio: Como no existen las raíces cuadradas de números negativos, ha de ser $x-1 \geq 0$ $\Rightarrow x \geq 1;\quad Dom(y) = [1, +\infty)$

2.- Puntos de corte: Para *x = 0*, no existe la función.

Para *y = 0*, $\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1$. El único punto de corte es *(1, 0)*

3.- Asíntotas:

- Verticales: no hay.
- Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$. No hay Existe rama parabólica.
- Oblicuas: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x^2}}\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2}} = \sqrt{0} = 0$. No hay.

4.- Monotonía:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$. La función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.

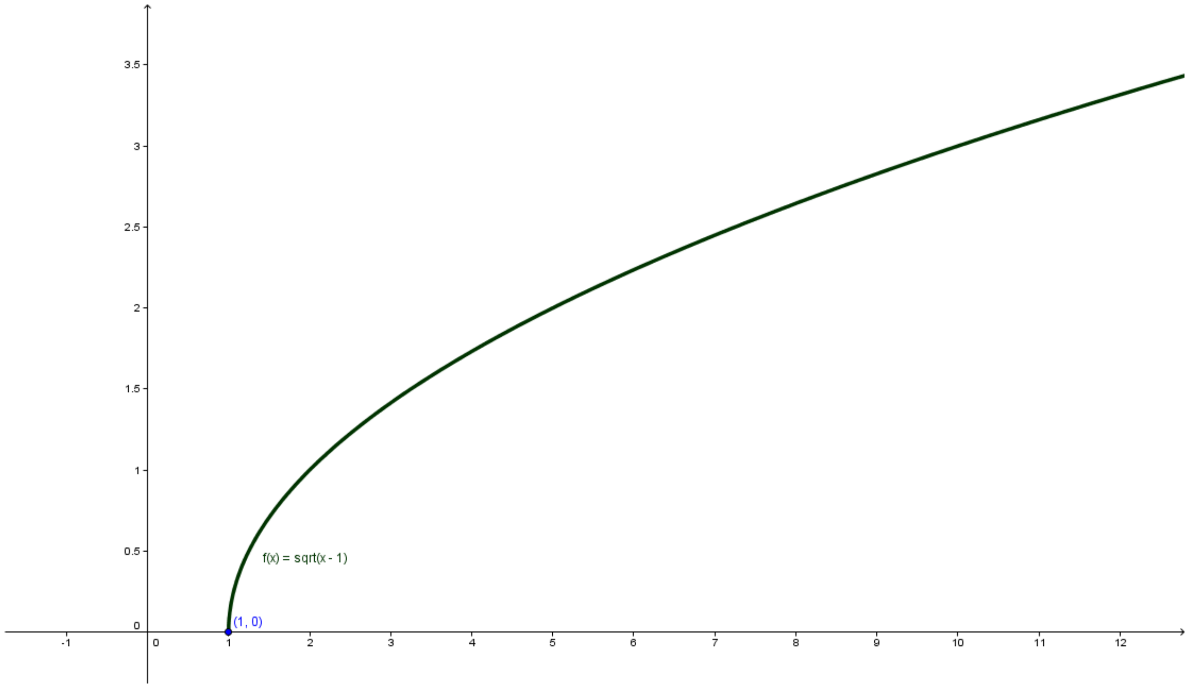
5.- Concavidad:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{(x-1)^{1/2}} = \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}$$

$$y'' = \frac{1}{2}.\frac{-1}{2}(x-1)^{-3/2} = \frac{-1}{4}.\frac{1}{(x-1)^{3/2}} = \frac{-1}{4\sqrt{(x-1)^3}} = \frac{-1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

La segunda derivada no se anula nunca y es negativa para todo valor de x > 1.

Por tanto, siempre es cóncava positiva.



Ejemplo 15

Gráfica $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

1.- Dominio: $x^2+1>0$ *siempre* $\Rightarrow$ $Domf=\mathbb{R}$

2.- Cortes con los ejes: $\begin{cases}\text{con OX: y=0} \Rightarrow \text{x+1=0} \Rightarrow \text{x=-1} & (-1,0)\\ \text{con OY: } x=0 \Rightarrow y=1 & (0,1)\end{cases}$

3.- Paridad: no tiene simetrías.

4.- Asíntotas:

- Horizontales.

  $\odot$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{indeter.}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1$ $\Rightarrow$ y=1 asíntota horizontal por la derecha.

  Posición relativa:

  Para $x=100$ $f(100)=\dfrac{101}{\sqrt{10001}}=1.0099>1 \Rightarrow$ la función está por encima de la asíntota.

  $\odot$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-t+1}{\sqrt{t^2+1}}=\left(\dfrac{-\infty}{\infty}\text{indet.}\right)=-1 \Rightarrow$ y=-1 asíntota horizontal por la izquierda.

  Posición relativa:

  Para $x=-100$ $f(-100)=\dfrac{-99}{\sqrt{10001}}=-0.989>-1 \Rightarrow$ la función está por encima de la A.H.

- Verticales: no tiene asíntotas verticales.
- Oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas

5.- Monotonía.

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-\dfrac{(x+1)\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$y'=0 \Rightarrow (1-x)=0 \Rightarrow$ x=1 posible extremo relativo

$\xrightarrow[\text{CRECIENTE}]{y'>0}$ $\underset{\text{MÁXIMO RELATIVO}}{1}$ $\xleftarrow[\text{DECRECIENTE}]{y'<0}$

Alcanza un máximo relativo para x=1 $\left(1,\sqrt{2}\right)$

6.- Curvatura

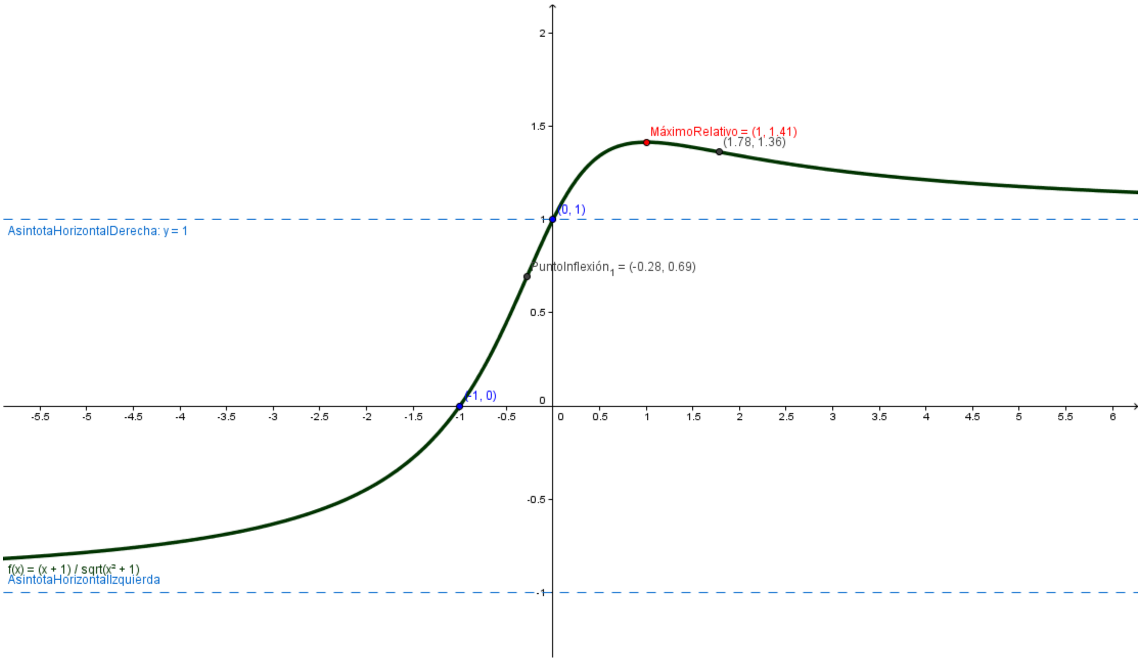
$$y''=\frac{(-1)\sqrt{(x^2+1)^3}-\dfrac{(1-x)3(x^2+1)^2\,2x}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^2-3x-1}{(x^2+1)^3\cdot\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$y''=0 \Rightarrow 2x^2\text{-3x-1=0} \Rightarrow \text{x=}\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ posibles puntos de inflexión

$-\infty \xleftrightarrow[\text{CONCAVA POSITIVA}]{y''>0}$ $\underset{\text{PUNTO DE INFLEXIÓN}}{\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}}$ $\xleftrightarrow[\text{CONCAVA NEGATIVA}]{y''<0}$ $\underset{\text{PUNTO DE INFLEXIÓN}}{\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}}$ $\xleftrightarrow[\text{CONCAVA POSITIVA}]{y''>0} \infty$

$P.I.$ para $x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$ $\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{4},\text{f}\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)\right)\approx(-0.28,0.7)$

P.I. para x=$\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$ $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4},\text{f}\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\right)\approx(1.78,1.36)$


MáximoRelativo = (1, 1.41)
(1.78, 1.36)
(0, 1)
AsintotaHorizontalDerecha: y = 1
PuntoInflexión1 = (-0.28, 0.69)
(-1, 0)
f(x) = (x + 1) / sqrt(x² + 1)
AsintotaHorizontalIzquierda

Ejemplo 16:

Gráfica $y = e^{-x}\cdot\left(x^2+6x+9\right)$

1.- Dominio: $Domf = \mathbb{R}$

2.- Cortes con los ejes: $\left[\begin{array}{l} \text{con OX: y=0} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}=0 \ \ no \ \ tiene \ \ sol. \\ x^2+6x+9=0 \Rightarrow x=-3 \quad (-3,0) \end{cases} \\ \text{con OY: } x=0 \Rightarrow y=9 \quad (0,9) \end{array}\right.$

3.- Paridad: no tiene simetrías.

4.- Asíntotas:

- Horizontales.

  ⊙ $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(x^2+6x+9\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+9}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} in\, deter.\right) \underset{e^x > x^2+6x+9}{=} 0$ $\Rightarrow$ y=0 A.H. por la derecha.

  Posición relativa:

  Para x=100 $f(100) = \frac{100609}{e^{100}} > 0$ por tanto la función está por encima de la asíntota.

  ⊙ $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(x^2+6x+9\right) = \lim_{t\to\infty} e^t(t^2-6t+9) = \infty\cdot\infty = \infty$ $\Rightarrow$ no tiene A.H. por la izquierda.

- Verticales: no tiene asíntotas verticales.
- Oblicuas: solo podría tener por la izquierda.

  $m = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}\left(x^2+6x+9\right)}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t(t^2-6t+9)}{-t} = \left(\frac{\infty}{-\infty} in\, det.\right) \underset{e^t(t^2-6t+9)>-t}{=} -\infty$

  No tiene asíntotas oblicuas

5.- Monotonía.

$y' = (-1)e^{-x}\left(x^2+6x+9\right) + e^{-x}(2x+6) = e^{-x}\left(-x^2-4x-3\right)$

$y'=0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2-4x-3=0 \Rightarrow \text{x=-3; x=-1 posibles extremos relativos} \\ \mathrm{e}^{-x}=0 \ \ no \ \ tiene \ \ solución \end{cases}$

$-\infty \xleftrightarrow[\text{DECRECIENTE}]{y'<0} \underset{\text{MINIMO RELATIVO}}{-3} \xleftrightarrow[\text{CRECIENTE}]{y'>0} \underset{\text{MÁXIMO RELATIVO}}{-1} \xleftrightarrow[\text{DECRECIENTE}]{y'<0} \infty$

Mínimo relativo para $x=-3$ $\quad (-3, \mathrm{f}(-3)) = (-3,0)$

Máximo relativo para x=-1 $\quad (-1, \mathrm{f}(-1)) = (-1, 4\mathrm{e})$

6.- Curvatura

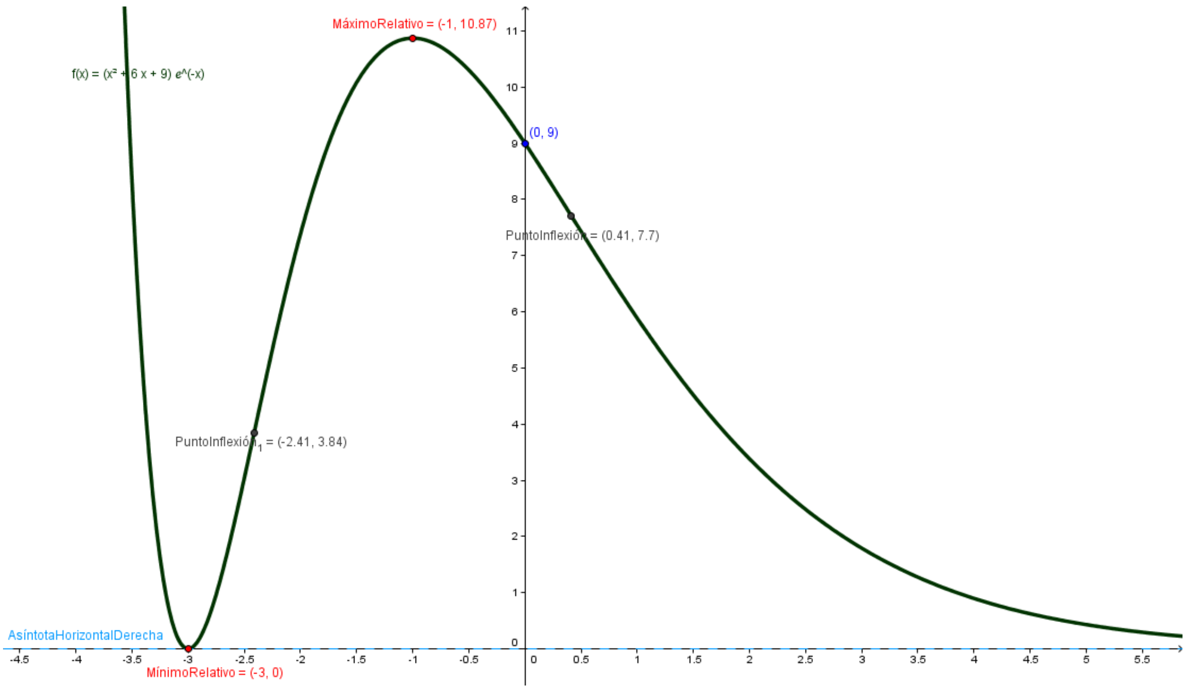
$y'' = e^{-x}\left(x^2+2x-1\right)$

$y''=0 \Rightarrow x^2\text{+2x-1=0} \Rightarrow \text{x=}\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$ posibles puntos de inflexión

$-\infty \xleftrightarrow[\text{CONCAVA POSITIVA}]{y''>0} \underset{\text{PUNTO DE INFLEXIÓN}}{-1-\sqrt{2}} \xleftrightarrow[\text{CONCAVA NEGATIVA}]{y''<0} \underset{\text{PUNTO DE INFLEXIÓN}}{-1+\sqrt{2}} \xleftrightarrow[\text{CONCAVA POSITIVA}]{y''>0} \infty$

$P.I.$ para $x=-1-\sqrt{2}$ $\quad \left(-1-\sqrt{2}, \mathrm{f}\left(-1-\sqrt{2}\right)\right) \approx (-2.41, 3{,}84)$

P.I. para $x=-1+\sqrt{2}$ $\quad \left(-1+\sqrt{2}, \mathrm{f}\left(-1+\sqrt{2}\right)\right) \approx (0.41, 7.7)$


f(x) = (x² + 6 x + 9) e^(-x)
MáximoRelativo = (-1, 10.87)
(0, 9)
PuntoInflexión = (0.41, 7.7)
PuntoInflexión1 = (-2.41, 3.84)
AsíntotaHorizontalDerecha
MínimoRelativo = (-3, 0)

Ejemplo 17

Gráfica $y = \ln\left(x^3 - x\right)$

1.-Dominio. $Domf = \left\{x \in \mathbb{R}\ t.q.\ x^3 - x > 0\ \right\} = (-1,0) \cup (1,+\infty)$

$$x^3 - x > 0 \to\ x^3 - x = 0 \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array}\right.$$

$$-\infty \xleftrightarrow{y<0} -1 \xleftrightarrow{y>0} 0 \xleftrightarrow{y<0} 1 \xleftrightarrow{y>0} +\infty$$

2.- Cortes con los ejes: $\left[\begin{array}{l} \text{con OX: y=0} \Rightarrow \ln\left(x^3 - x\right) = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x \approx 1{,}32 \quad (1.32, 0) \\ \text{con OY: } x = 0\ no\ es\ del\ dominio \end{array}\right.$

3.- Paridad: no tiene simetrías.

4.- Asíntotas:

- Horizontales.
    - por la derecha $\lim_{x\to\infty} \ln\left(x^3 - x\right) = \ln\infty = \infty$ no hay.
    - por la izquierda No se estudia por no estar en el dominio de definición.
- Verticales: Los posibles valores son x=1, x=0, x=-1
    - x=-1 $\lim_{x\to -1^+} \ln\left(x^3 - x\right) = \ln 0^+ = -\infty$ tenemos una asíntota vertical en x=-1 (no tiene sentido estudiar $\lim_{x\to -1^+} \ln\left(x^3 - x\right)$ por no estar en el dominio)
    - x=0 $\lim_{x\to 0^-} \ln\left(x^3 - x\right) = \ln 0^+ = -\infty$ tenemos una asíntota vertical en x=0 (no tiene sentido estudiar tenemos una asíntota vertical en x=1 (no tiene sentido estudiar $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^3 - x\right)$ por no estar en el dominio)
    - x=1 $\lim_{x\to 1^+} \ln\left(x^3 - x\right) = \ln 0^+ = -\infty$ tenemos una asíntota vertical en x=1 (no tiene sentido estudiar $\lim_{x\to 1^-} \ln\left(x^3 - x\right)$ por no estar en el dominio)
- Oblicuas: Por la misma razón que en las horizontales solo puede haber por la derecha.

  $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^3 - x\right)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} Indet.\right) \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} = 0$ (recodar que $m \neq 0$ y real)

  No tiene asíntotas oblicuas

5.- Monotonía.

$$y' = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $\frac{\sqrt{3}}{3} \notin Domf$ el único posible extremo relativo puede ser $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.58$

$$-1 \xleftrightarrow[CRECIENTE]{y'>0} \underset{\text{MÁXIMO RELATIVO}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \xleftrightarrow[DECRECIENTE]{y'<0} 0 \xleftrightarrow[\times]{\times} 1 \xleftrightarrow[CRECIENTE]{Y'>0} +\infty$$

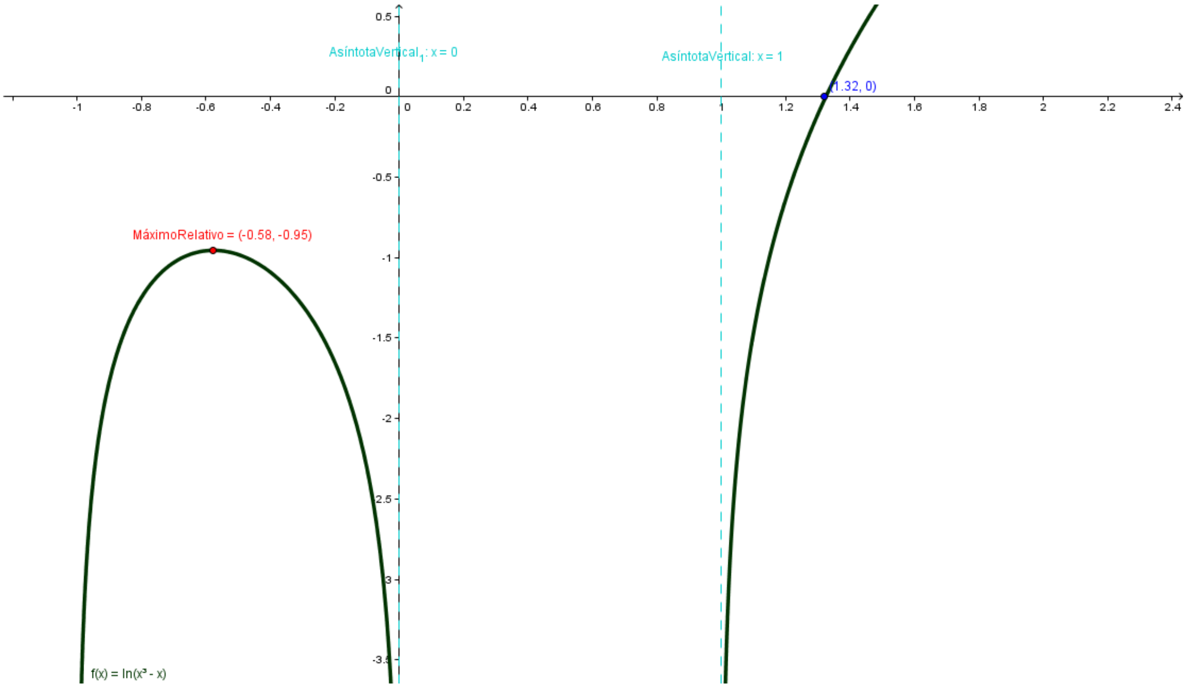
Máximo relativo para $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad (-0.58, -0{,}95)$

6.- Curvatura

$$y'' = \frac{-3x^4 - 1}{x^6 - 2x^4 + x^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \Rightarrow -3x^4 - 1 = 0\ \ no\ tiene\ sol.$$

$$-1 \xleftrightarrow[CONCAVA\ NEGATIVA]{y''<0} -\frac{\sqrt{3}}{3} \xleftrightarrow[CONCAVA\ NEGATIVA]{y''<0} 0 \xleftrightarrow[\times]{\times} 1 \xleftrightarrow[CONCAVA\ NEGATIVA]{y''<0} +\infty$$

Es siempre cóncava negativa.



Ejemplo 18

$Gráfica\ \ y=\dfrac{1-x}{1-|x|}$ Vamos a definir la función quitando el valor absoluto:

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1-(-x)}=\dfrac{1-x}{1+x} & si\ x<0\\ 1 & si\ \ x=0\\ \dfrac{1-x}{1-x} & si\ \ x>0\end{cases}\approx F(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x} & si\ \ x<0\\ 1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$$

Nota: La función f(x) presenta una discontinuidad evitable en x=1, si asignamos f(1)=1 obtenemos su extensión continua F(x) en x=1.

1.-Dominio. $Domf=\{x\in\mathbb{R}\ t.q.\ 1-|x|\neq 0\ \}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2.- Cortes con los ejes: $\left[\begin{array}{l}\text{con OX: y=0}\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1\ \ \text{no es del dominio}\\ \text{con OY: } x=0\Rightarrow y=1\ \ (0,1)\end{array}\right.$

3.- Paridad: no tiene simetrías.

4.- Asíntotas:

- Horizontales.
  - por la derecha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 1=1$ asíntota horizontal y=1
  - por la izquierda $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1$ asíntota horizontal y=-1
- Verticales: Los posibles valores son x=1, x=-1
  - x=-1 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x}{1+x}=\left(\dfrac{2}{0} in\det.\ signo\right)=\pm\infty$ tenemos una asíntota vertical en x=-1

    Posición relativa:

    $$\lim_{x\to-1^+}\frac{1-x}{1+x}=\left(\frac{2}{0^+}\right)=\infty$$

    $$\lim_{x\to-1^-}\frac{1-x}{1+x}=\left(\frac{2}{0^-}\right)=-\infty$$
  - x=1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ no es una asíntota vertical
- Oblicuas: Tiene dos horizontales, luego no tiene asíntotas oblicuas.

5.- Monotonía.

$$y'=\begin{cases}\dfrac{-2}{(1+x)^2} & si\ \ x<0\\ 0 & si\ \ x>0\end{cases}$$

$y'=0$ no tiene solución, se estudia la monotonía en los puntos que no son del dominio y donde cambia la función.

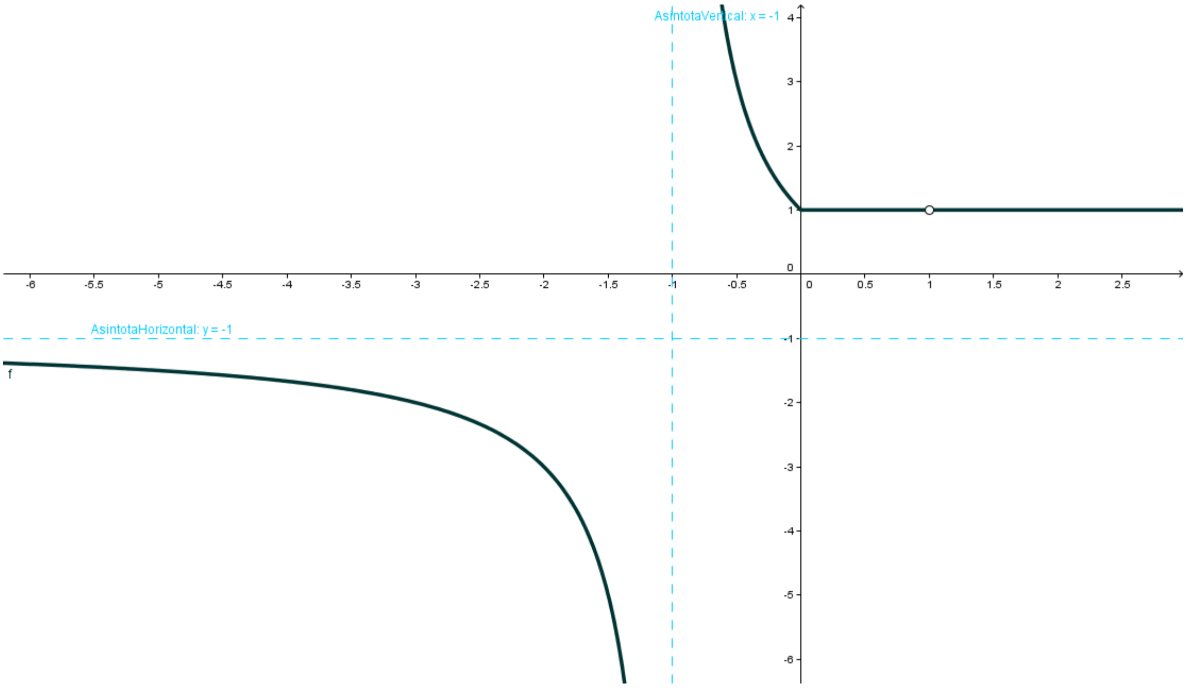
$$-\infty\xleftrightarrow[DECRECIENTE]{y'<0}-1\xleftrightarrow[DECRECIENTE]{y'<0}0\xleftrightarrow[CONSTANTE]{y'=0}1\xleftrightarrow[CONSTANTE]{y'=0}+\infty$$

6.- Curvatura

$$y''=\frac{4}{x^3+3x^2+3x+1}$$

$y''=0$ no tiene solución

$$-\infty\xleftrightarrow[COCAVA\ NEGATIVA]{y''<0}-1\xleftrightarrow[CONCAVA\ POSITIVA]{y''>0}0\xleftrightarrow[CONSTANTE]{y''=0}1\xleftrightarrow[CONSTANTE]{y''=0}+\infty$$



AsintotaVertical: x = -1
AsintotaHorizontal: y = -1
f