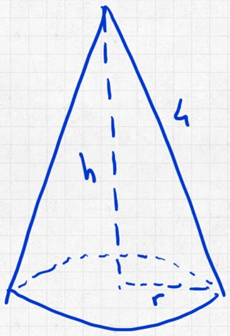
Entre todos los conos rectos de generatriz 4 dm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo



Función a maximizar: $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Relación entre las variables: $h^2 + r^2 = 4^2;\ r^2 = 16 - h^2$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(16-h^2)h$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(16h - h^3) = \frac{16\pi}{3}h - \frac{\pi}{3}h^3$$

Derivamos e igualamos a cero para encontrar el posible máximo:

$$V'(h) = \frac{16\pi}{3} - \frac{3\pi}{\cancel{3}}h^2$$

$$V'(h) = 0;\quad \frac{16\pi}{3} - \pi h^2 = 0;\quad \cancel{\pi} h^2 = \frac{16\cancel{\pi}}{3};\quad h = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$$

$h_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ POSIBLE MÁXIMO

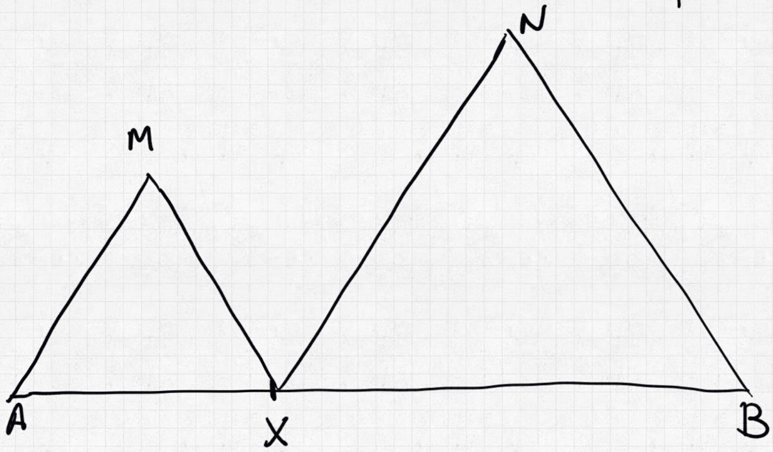
$h_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$ (SE DESCARTA)

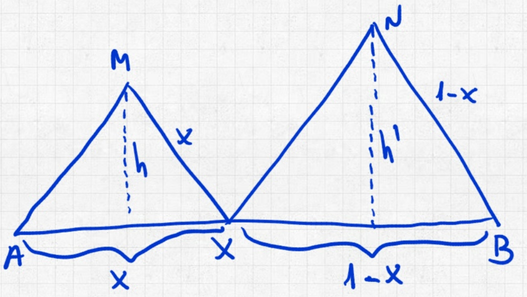
$$V''(h) = -2\pi h$$

$V''\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -2\pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) < 0$ luego el volumen será máximo para $\boxed{h = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ dm}}$

Calculamos ahora r: $r = \sqrt{16 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{48}{9}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{6}}{3}\text{ dm}}$

Dado el segmento AB de longitud 1 metro, halla un punto X de AB tal que las sumas de las áreas de los triángulos equiláteros $\widehat{AXM}$ y $\widehat{XBN}$ sea mínima.





$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 ; \quad h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} ; \quad h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$h' = \sqrt{(1-x)^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} = \sqrt{(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4(1-x^2)-(1-x^2)}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3(1-x)^2}{4}} = \frac{(1-x)}{2}\sqrt{3}$$

$$A = A_1 + A_2 ; \quad \left.\begin{aligned} & A_1(x,h) = \frac{x \cdot h}{2} ; \quad A_1 = \frac{x\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \\ & A_2(x,h') = \frac{(1-x) \cdot h'}{2} ; \quad A_2 = \frac{(1-x)\left(\frac{1-x}{2}\right)\sqrt{3}}{2} = \frac{(1-x)^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}\right\} A(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(1-2x+x^2)\sqrt{3}}{4}$$

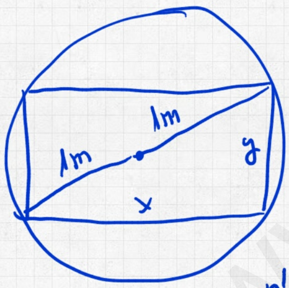
$$A(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(1-2x+x^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+1-2x+x^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x^2-2x+1\right)$$

$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(4x-2)$; $A'(x) = 0$; $\frac{\sqrt{3}}{4}(4x-2) = 0$; $4x - 2 = 0$; $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Posible mínimo

$A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}$; $A''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} > 0$ mínimo en $x = \frac{1}{2}$ metros.

El punto X está situado en la mitad del segmento $\overline{AB}$

Determina el área máxima de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 1 metro.



$$A(x,y) = x \cdot y$$

$$x^2 + y^2 = 2^2 ; \quad y = \sqrt{4-x^2}$$

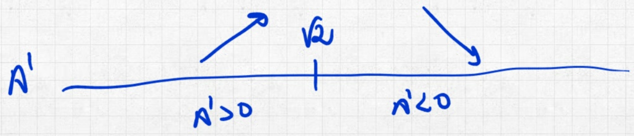
$$A(x) = x\sqrt{4-x^2} = \sqrt{x^2(4-x^2)} = \sqrt{4x^2-x^4}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^2-x^4}}(8x-4x^3) = \frac{4x-2x^3}{\sqrt{4x^2-x^4}}$$

$A'(x) = 0$; $\frac{4x-2x^3}{\sqrt{4x^2-x^4}} = 0$; $4x - 2x^3 = 0$; $x(4-2x^2) = 0$

- $x = 0$ se descarta
- $4 - 2x^2 = 0$; $x = \pm\sqrt{2}$
  - $\sqrt{2}$ (posible máximo)
  - $-\sqrt{2}$ (se descarta)

$A(x)$ es continua en un entorno cercano a $\sqrt{2}$



luego hay un máximo para $x = \sqrt{2}$

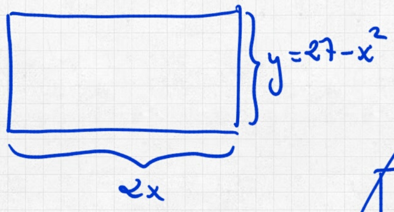
Dicha área máxima es:

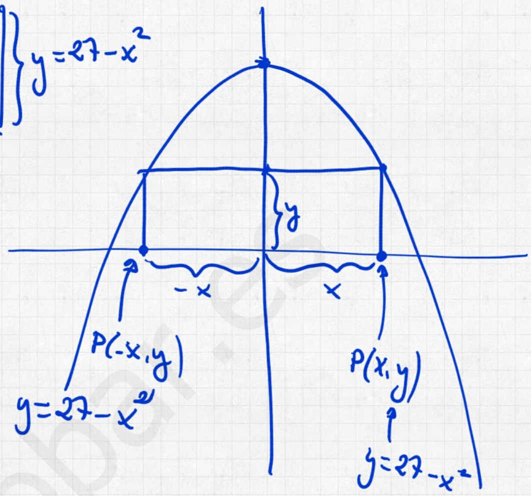
$$A(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = \boxed{2\ u^2}$$

Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima con dos vértices en el eje OX y los otros dos en la parte superir de la curva $y=27-x^2$

$A(x,y) = 2xy$

Relación entre las variables: $\underbrace{y = 27 - x^2}_{\text{la expresión de la función}}$





$A(x) = 2x(27-x^2) = 54x - 2x^3$

$A'(x) = 54 - 6x^2$

$A'(x) = 0$; $54 - 6x^2 = 0$; $x^2 = 9$; $x = \pm 3$ → $x_1 = 3$ POSIBLE MÁXIMO → $x_2 = -3$ (se descarta).

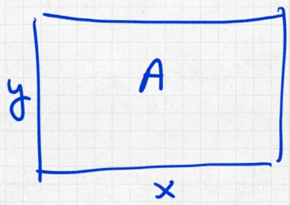
$A''(x) = -12x$

$A''(3) = -12 \cdot 3 < 0$ Máximo en $x = +3$

Dimensiones: Base $= 2 \cdot 3 = 6$

Altura $= 27 - 3^2 = 27 - 9 = 18$

Encuentra las dimensiones del rectángulo de área A que tiene perímetro mínimo



Función a minimizar: $P(x,y) = 2x + 2y$

Relación entre las variables: $x \cdot y = A$; $y = \frac{A}{x}$

$$P(x) = 2x + 2\left(\frac{A}{x}\right) = 2x + \frac{2A}{x}$$

$$P'(x) = 2 - \frac{2A}{x^2}$$

$P'(x) = 0$; $2 - \frac{2A}{x^2} = 0$; $\cancel{2} = \frac{\cancel{2}A}{x^2}$; $x^2 = A$; $x = \pm\sqrt{A}$

$x_1 = \sqrt{A}$ Posible pto extremo

$x_2 = -\sqrt{A}$ (se descarta).

$$P''(x) = -\frac{-2A \cdot 2x}{x^4} = \frac{4A}{x^3}$$

$P''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{(\sqrt{A})^3} > 0$ ya que $A > 0$ luego en $x = A$ hay un mínimo.

Dimensiones: $x = \sqrt{A}$

$y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{A}\sqrt{A}} = \sqrt{A}$

luego el rectángulo de perímetro mínimo es el cuadrado.