

## REPASO DE GEOMETRÍA

\* PRODUCTO ESCALAR:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$  es un número.

\* PRODUCTO VECTORIAL:  $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \dots$  es un vector

\* LA RECTA

$A(x_1, y_1, z_1)$   $B(x_2, y_2, z_2)$   
 $\vec{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$   
 PUNTO:  $A(x_1, y_1, z_1)$   
 VECTOR DIRECTOR:  $\vec{AB}$  ó  $\vec{u}_r$  ó  $\vec{dr}$

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 \end{cases}$$

$$r: \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$$

También puede venir dada por la intersección de dos planos:

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \rightarrow \text{De ahí sacamos un punto haciendo } x=0 \text{ ó } y=0 \text{ ó } z=0 \text{ (lo que nos convenga)}$$

$\rightarrow$  Y un vector director:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = \dots$$

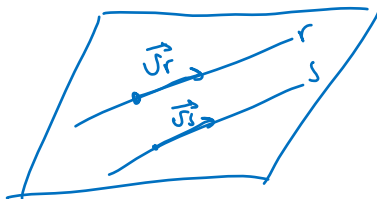
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS:  $r$  y  $s$ .

Calculo:  $\vec{u}_r$   $\vec{u}_s$   
 $P_r$   $P_s$

si  $r(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 1$

o dicho de otra forma si  $\vec{u}_r = \alpha \vec{u}_s$  son proporcionales

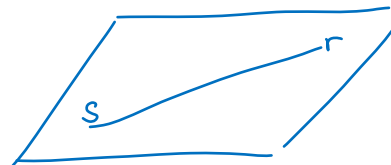
entonces las rectas son así:



PARALELAS

si  $P_r \notin s$

o

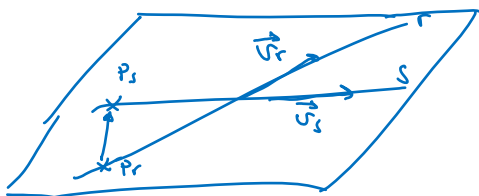


COINCIDENTES

si  $P_r \in s$

Si  $r(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$  o dicho de otra forma  $\vec{u}_r \neq \alpha \vec{u}_s$   
 $\vec{u}_r$  y  $\vec{u}_s$  son L.I.

entonces determinamos  $\vec{P_r P_s}$

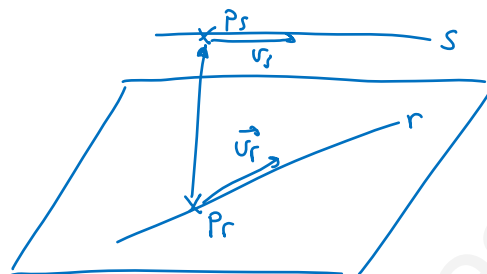


$$r(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) = 2$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) = 0$$

RECTAS SECANTES

RECTAS QUE INCIDEN EN UN PUNTO



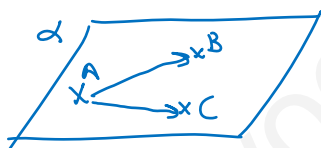
$$r(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) = 3$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r P_s}) \neq 0$$

RECTAS QUE SE CRUZAN

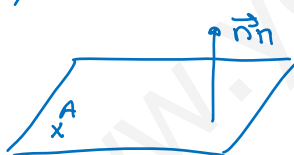
El pto de corte se determina igualando las dos rectas en paramétricas  
 (recuerda que hay que cambiar uno de los parámetros)

EL PLANO



\* Necesitamos un pto y dos vectores directores  
 (o tres puntos)

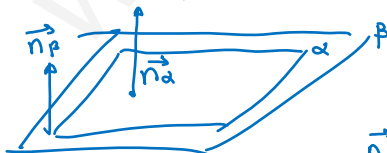
$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0;$$



\* Necesitamos un punto y un vector normal

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{donde } \vec{n} = (A, B, C)$$

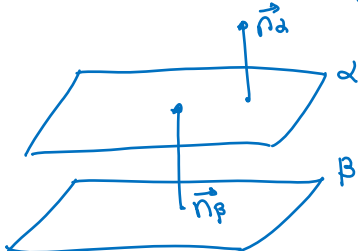
POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS ENTRE SI



COINCIDENTES.

$$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \quad \text{Además } P_\alpha \in \beta$$

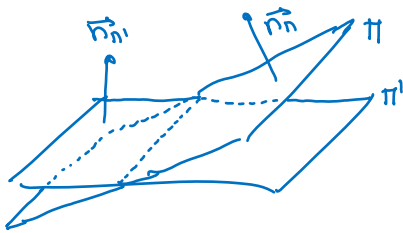
$\vec{n}_\alpha$  y  $\vec{n}_\beta$  proporcionales



PARALELOS  $\alpha \parallel \beta$

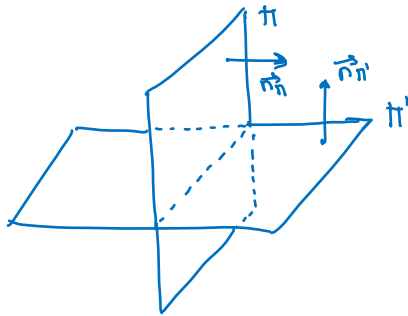
$$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \quad \text{Además } P_\alpha \notin \beta$$

$\vec{n}_\alpha$  y  $\vec{n}_\beta$  proporcionales



SECANTES.

$\vec{n}_{\pi}$  y  $\vec{n}_{\pi'}$  no son paralelos  
o  $r(\vec{n}_{\pi}, \vec{n}_{\pi'}) = 2$

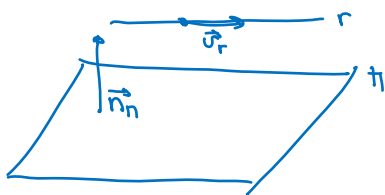


SECANTES PERPENDICULARES

$\pi \perp \pi'$  si  $\vec{n}_{\pi} \perp \vec{n}_{\pi'}$

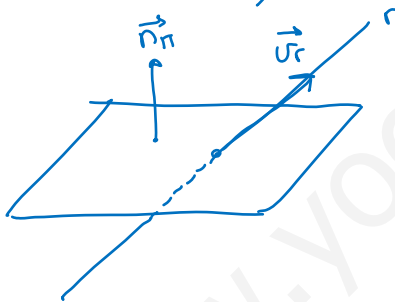
Condición:  $\vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0$   
producto escalar.

POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS Y RECTAS



RECTA PARALELA AL PLANO

$r // \pi$  cuando  $\vec{r} \perp \vec{n}_{\pi}$  luego  $\vec{r} \cdot \vec{n}_{\pi} = 0$   
producto escalar.



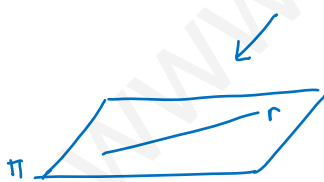
RECTA SECANTE (intersección en un punto) CON EL PLANO.

$\vec{r} \cdot \vec{n}_{\pi} \neq 0$

Hay un caso particular: RECTA PERPENDICULAR AL PLANO

$r \perp \pi$  si  $\vec{r} \cdot \vec{n}_{\pi} \neq 0$  y además

$\vec{r} = \alpha \cdot \vec{n}_{\pi}$  ( $\vec{r}$  y  $\vec{n}_{\pi}$  proporcionales).



$\vec{r} \cdot \vec{n}_{\pi} = 0$

Además, todos los pto de r están contenidos en  $\pi$ .

Para determinar el punto de corte:

$$r \equiv (x_0 + \lambda v_1, y_0 + \lambda v_2, z_0 + \lambda v_3)$$

coordenadas genéricas de un punto de r

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

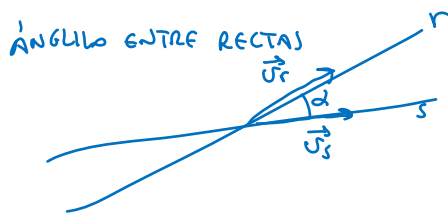
Empleamos una sola incógnita ( $\lambda$ ) que nos permite conseguir el pto de corte:

$a \neq 0$  ; recta y plano secantes.  
 $0 \neq b$  ; recta y plano paralelos  
 $0 \neq 0$  ; recta contenida en el plano

### ÁNGULO ENTRE RECTAS Y PLANOS

Todas las fórmulas vienen de la definición de producto escalar:

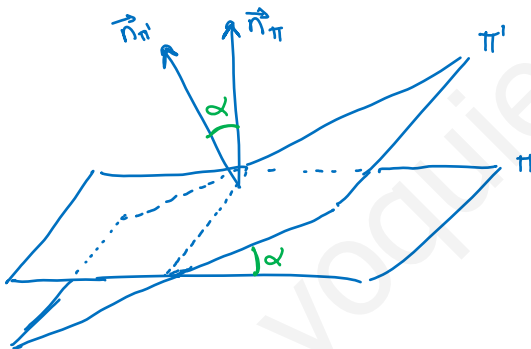
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ donde despejamos } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$



NO OLVIDAR

$$\cos \alpha = \cos(r, s) = \cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}$$

### ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

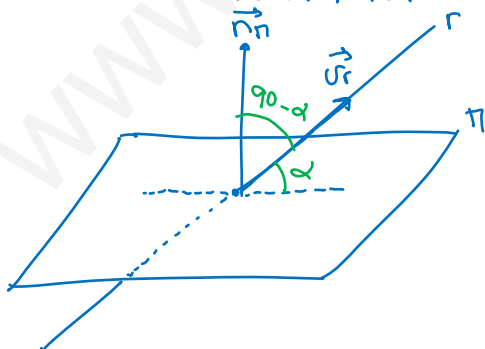


RECUERDA: VALOR ABSOLUTO.

$$\cos \alpha = \cos(\pi, \pi') = \cos(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_{\pi'}|}$$

MÓDULO DE UN VECTOR

### ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO



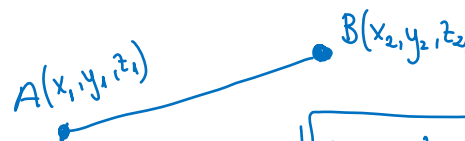
¡¡CUIDADO!!

$$\cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}$$

Después calculamos  $\alpha$   
 $\alpha \rightarrow$  ángulo entre  $r$  y  $\pi$ .

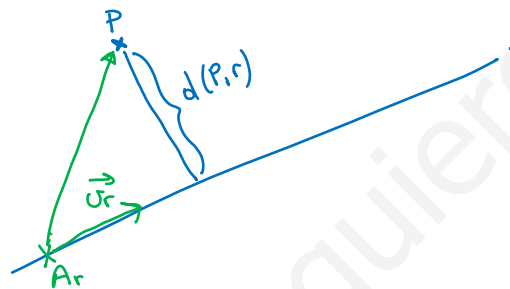
## DISTANCIAS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



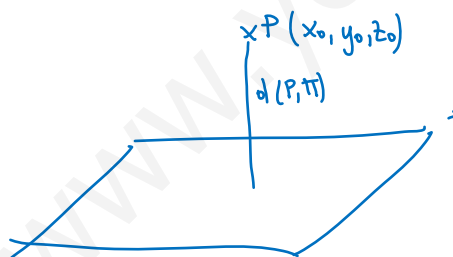
$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA



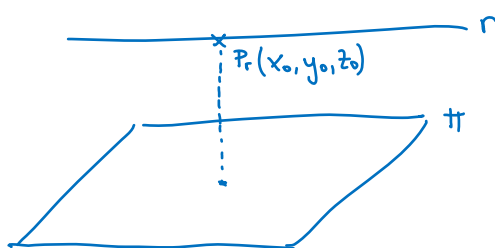
$$d(P, r) = \frac{|\vec{ArP} \times \vec{ur}|}{|\vec{ur}|}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO



$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

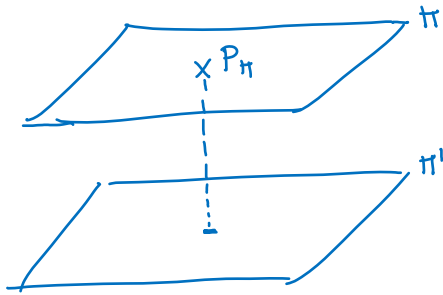
DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PLANO



Previamente determinamos la posición relativa de estos  
 $r \parallel \pi$  luego  $\vec{ur} \cdot \vec{n} = 0$ .  
 (si no,  $d(r, \pi) = 0$ ).

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

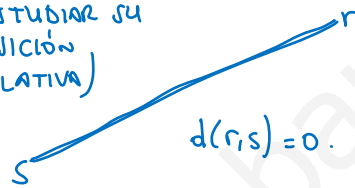
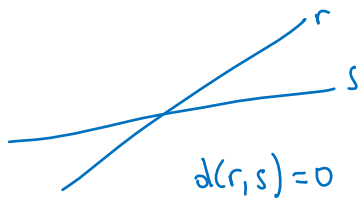
### DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS



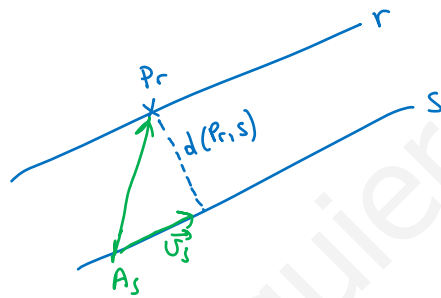
$$d(\pi, \pi') = d(P_\pi, \pi') = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

### DISTANCIA ENTRE RECTAS

(PREVIAMENTE HAY QUE ESTUDIAR SU POSICIÓN RELATIVA)

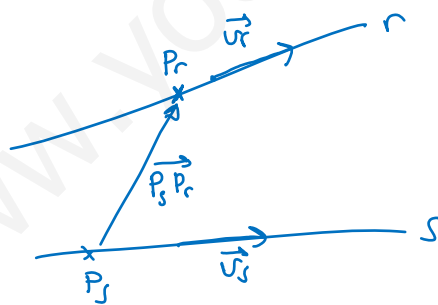


### ENTRE RECTAS PARALELAS:



$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\vec{A_s P_r} \times \vec{u_s}|}{|\vec{u_s}|}$$

### ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN



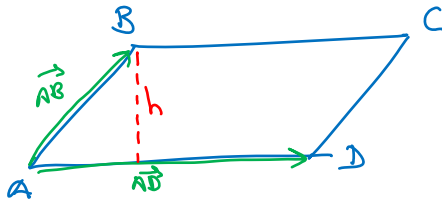
valor absoluto

$$d(r, s) = \frac{|\det(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \vec{P_r P_s})|}{|\vec{u_r} \times \vec{u_s}|}$$

módulo

## ÁREAS Y VOLUMENES

### Paralelogramo



producto vectorial

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

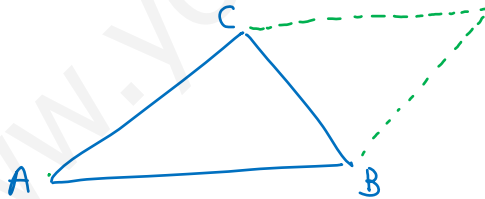
módulo

\* Si me pidieran altura del paralelogramo sobre la base  $\vec{AD}$ :

modo 1: Determinamos recta que pasa por A y D  
y después  $d(B, r_{AD})$

modo 2: Calculamos la longitud de la base:  $|\vec{AD}|$   
y después  $\text{Área} = \underbrace{|\vec{AD}|}_{\text{base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altura}}.$   
calculada previamente

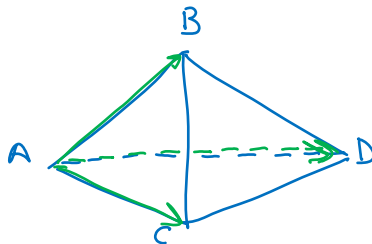
### ÁREA DEL TRIÁNGULO



(mitad del paralelogramo correspondiente)

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

### VOLUMEN DEL TETRAEDRO



valor absoluto

$$V = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

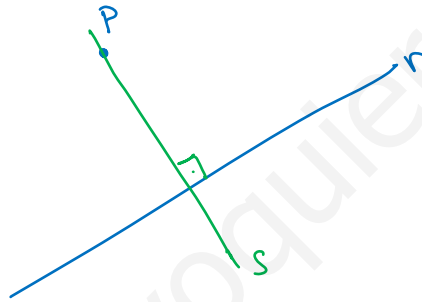
producto mixto  $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$

número

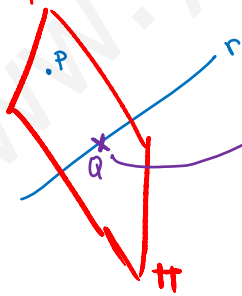
Si me pidieran la altura del tetraedro  
desde el vértice B.

Determinamos el plano que contiene a A, C, D  
y después  $d(B, \text{plano})$

RECTA PERPENDICULAR A UNA DADA ( $r$ ) QUE PASE POR P



1º paso: Determinamos EL PLANO QUE CONTIENE A " $P$ " Y ES PERPENDICULAR A " $r$ ".

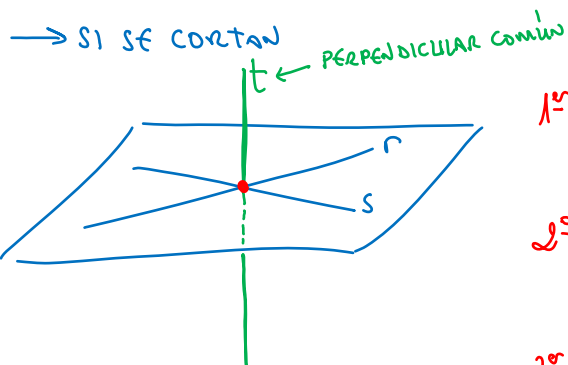


2º paso: Determinamos Q (pto de corte de  $r$  y  $\Pi$ )

3º paso: Recta  $s$  que pasa por dos puntos  $P$  y  $Q$



RECTA PERPENDICULAR COMÚN A OTRAS DOS :  
(Previamente estudiamos su posición relativa)

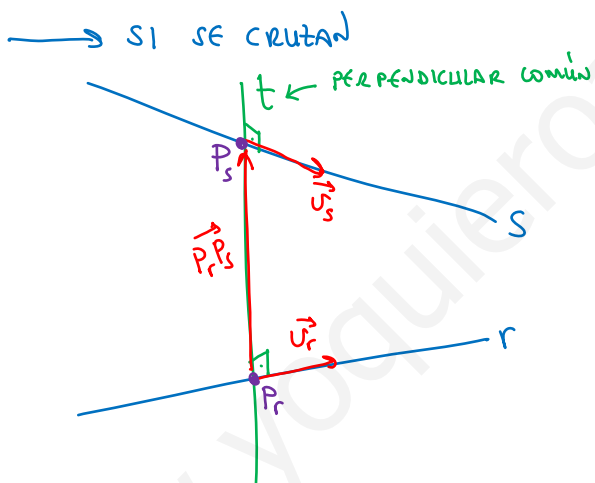


1º paso: Determinación del pto de corte .

2º paso: Determinación de  $\vec{U}_t$

$$\vec{U}_t = \vec{U}_R \times \vec{U}_S$$

3º paso: Determinación de una recta dados pto y vector director



1º paso:

Expresamos  $P_R(x_0 + \lambda u_1, y_0 + \lambda u_2, z_0 + \lambda u_3)$   
 $P_S(x'_0 + \mu v_1, y'_0 + \mu v_2, z'_0 + \mu v_3)$

2º paso:

Determinamos el vector

$$\vec{P_R P_S} = (\dots, \dots, \dots)$$

en función de  $\lambda$  y  $\mu$

3º paso:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } \vec{P_R P_S} \perp \vec{U_R}, \text{ entonces } \vec{P_R P_S} \cdot \vec{U_R} = 0 \\ \text{Como } \vec{P_R P_S} \perp \vec{U_S}, \text{ entonces } \vec{P_R P_S} \cdot \vec{U_S} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{SISTEMA DE} \\ \text{DOS EC. CON} \\ \text{DOS INCÓGNITAS} \\ \lambda \text{ y } \mu \end{array}$$

4º paso:

Determinación de la recta "t"  
que pasa por R y S.

...

y volvin volando, este cuento

SE HA ACABADO