Teoremas

TEORMAS DE WEIERSTRASS, BOLZANO, ROLLE Y LAGRANGE

PROBLEMAS RESUELTOS

Dada $F(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-4}$, escriba la ecuación de la secante a F que une los puntos $(-2, F(-2))$ y $(2, F(2))$. ¿Existe un punto c en el intervalo $[-2, 2]$ verificando que la tangente a la gráfica de F en $(c, F(c))$ es paralela a la secante que ha hallado? En caso afirmativo razone su respuesta y calcule c, en caso negativo razone por qué no existe.

$$F(-2) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}; \qquad F(2) = \frac{2}{-2} = -1$$

La ecuación de la recta secante que pasa por los puntos $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$ y $(2, -1)$ es:

$$\begin{cases} \text{Punto}: (2, -1) \\ \text{Vector director}: \left(4, \frac{2}{3}\right) \approx (12, 2) \approx (6, 1) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{1} \quad \Rightarrow \quad x - 6y - 8 = 0$$

Por otra parte, la función $F(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 2]$, puesto que su dominio es *Dom* $F(x) = \mathbb{R} - \{4\}$. Además es derivable en el intervalo $(-2, 2)$. Por tanto podemos aplicar el *teorema del valor medio* y afirmar que existe un punto $c \in (-2, 2)$ tal que:

$$F'(x) = \frac{F(2) - F(-2)}{2 - (-2)}$$

es decir, existe al menos un punto en $(-2, 2)$ tal que la tangente es paralela a la secante. Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} m_{\text{secante}} = \frac{1}{6} \\ m_{\text{tangente}} = F'(c) \end{array}\right\} \text{Deben coincidir por ser paralelas.}$$

$$F'(x) = \frac{x^2 - 8x + 6}{(x-4)^2} \quad \Rightarrow \quad F'(c) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2 - 8c + 6}{(c-4)^2} = \frac{1}{6}$$

Desarrollando la ecuación anterior y simplificando queda:

$$c^2 - 8c + 4 = 0$$

cuyas raíces son: $c = 4 \pm 2\sqrt{3}$.

Existe sólo un punto que cumple la condición buscada, $c_1 = 4 - 2\sqrt{3}$, ya que $c_2 = 4 + 2\sqrt{3} \notin (-2, 2)$.

Demuestra que la función $f(x) = 2 + 2x - e^x$ corta al eje OX en el intervalo $(-1, 1)$ y tiene un máximo relativo en ese mismo intervalo.

La función es continua en el intervalo de estudio y, además, tiene distinto signo en los extremos del intervalo. Por tanto, por el teorema de Bolzano, cortará al eje OX entre -1 y 1. En efecto:

$$f(-1) = 2 - 2 - e^{-1} < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = 2 + 2 - e^1 < 0$$

En consecuencia, existirá un punto $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$. En ese punto, la corta al eje OX. Para ver que tiene un máximo hallamos las derivadas primera y segunda:

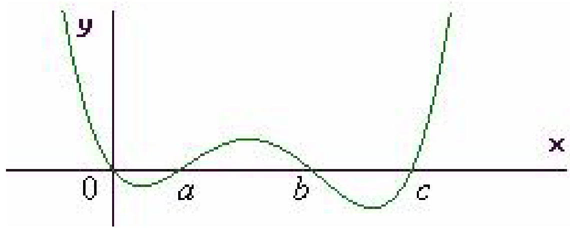
$$f'(x) = 2 - e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \text{Ln } 2 \cong 0{,}6931 < 1$$

$$f''(x) = -e^x \quad \Rightarrow \quad f''(\text{Ln } 2) = -e^{\text{Ln } 2} = -2 < 0$$

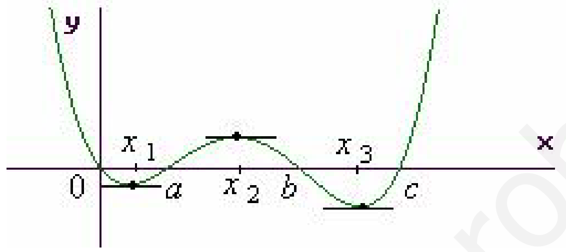
Como la derivada segunda es negativa en $x = \text{Ln } 2$, para ese valor se tendrá, efectivamente un máximo.

Se considera la función $f(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$, con $0 < a < b < c$. Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales.

La función $f(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$ es polinómica. Por tanto, es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además corta al eje OX exactamente en cuatro puntos: $x = 0$, $x = a$, $x = b$ y $x = c$. Un esbozo de su gráfica es:



Como puede apreciarse visualmente, la curva tiene un máximo y dos mínimos. En las abscisas de esos puntos la derivada se anula, pues son puntos con tangente horizontal (*).



Por tanto, la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales: x_1, x_2 y x_3.

(*) Esto es consecuencia del teorema de Rolle, que dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) que verifica $f(a) = f(b)$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Aquí los intervalos son: $[0, a]$, $[a, b]$ y $[b, c]$.

Demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real.

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, que es continua y derivable por ser un polinomio.

Como $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$, por el teorema de Bolzano se deduce que la función corta al eje OX en el intervalo $(0, 1)$. Luego la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1.

Como $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ para todo x, la función será siempre creciente. En consecuencia, sólo corta una vez al eje OX. Luego la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ sólo tiene una raíz real.

Enunciar el teorema de Rolle. Demostrar que la función $f(x) = x^3 - x + a$ cumple la hipótesis de este teorema en el intervalo [0, 1] cualquiera que sea el valor de a. Encontrar el punto en el cual se cumple la tesis.

Teorema de Rolle: Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) que verifica $f(a) = f(b)$. Entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Por tratarse de un polinomio, la función $f(x) = x^3 - x + a$ es continua para todo número real; en particular en el intervalo $[0, 1]$. Como además $f(0) = a$ y $f(1) = a$, también se verifica la segunda hipótesis. En consecuencia, existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Derivando:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

El valor buscado es $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, que es el que cae dentro del intervalo.

Dada la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)}{\cos x - \cos(x+1)}$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. ¿Es constante esta función $f(x)$?

Derivando como un cociente se tiene:

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \cos(x+1))(\cos x - \cos(x+1)) - (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1))(-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1))}{(\cos x - \cos(x+1))^2} =$$

$$= \frac{(\cos^2 x - \cos^2(x+1)) - (\operatorname{sen}^2(x+1) - \operatorname{sen}^2 x)}{(\cos x - \cos(x+1))^2} =$$

$$= \frac{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - (\operatorname{sen}^2(x+1) + \cos^2(x+1))}{(\cos x - \cos(x+1))^2} = \frac{1-1}{(\cos x - \cos(x+1))^2} = 0$$

Como su derivada vale 0, la función es constante.

Nota: Si utilizamos las fórmulas de sumas de senos y cosenos se tiene que:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)}{\cos x - \cos(x+1)} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{2x+1}{2}\cos\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{-2\operatorname{sen}\dfrac{2x+1}{2}\operatorname{sen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = -\operatorname{cotg}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Esta función es constante, y por tanto, su derivada valdrá 0.

Enunciar el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial. Usarlo para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $\cos y - \cos x = y - x$.

El teorema del valor medio dice: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Consideramos la función $f(x) = \cos x$. Esta función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y en particular en cualquier intervalo $[x, y]$. Por tanto, aplicando el teorema:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} = f'(c), \text{ siendo } x < c < y$$

Luego:

$$\frac{\cos y - \cos x}{y-x} = -\operatorname{sen} c \quad \Rightarrow \quad \cos y - \cos x = (y-x)(-\operatorname{sen} c)$$

Como $\operatorname{sen} c \le 1$ para cualquier valor de c, se tendrá que:

$$(y-x)(-\operatorname{sen} c) \le y - x$$

Por tanto, $\cos y - \cos x \le y - x$.

Demuestra que la función $y = x^3 - x - \operatorname{sen} \pi x$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$ y un mínimo relativo en el intervalo $(0, 1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

La función dada es continua y derivable (con derivada continua) en todo $\mathbb{R}$, y en particular en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. Por tanto cumple el teorema de Rolle, el de Bolzano y todos los relativos a continuidad y derivabilidad.

Como $y(1) = 0$, $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$, por el teorema de Rolle, existirá un valor $c \in (-1, 0)$ en donde $y'(c) = 0$; y por lo mismo, otro punto $c' \in (0, 1)$ en el que $y'(c') = 0$. Lo que no sabemos, de momento, es si esos puntos son máximos o mínimos.

Haciendo la derivada se tiene: $y' = 3x^2 - 1 - \cos \pi x$.

- Como $y\,'(-1) = 2 + \pi > 0$ e $y\,'(0) = -1 - \pi < 0$, la función es creciente en un entorno de $x = -1$ y decreciente en un entorno de $x = 0$. Por tanto, algún valor $c \in (-1, 0)$ tal que $y\,'(c) = 0$ es un máximo.
- Como $y\,'(0) = -1 - \pi < 0$ e $y\,'(1) = 2 + \pi > 0$, la función es decreciente en un entorno de $x = 0$ y creciente en un entorno de $x = 1$. Por tanto, algún valor $c\,' \in (0, 1)$ tal que $y\,'(c\,') = 0$ es un mínimo.

Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función $f(x) = 3\cos^2 x$, en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Calcular también el valor al que se refiere la tesis del teorema.

La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$; en particular, en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Además:

$$f(\pi/2) = 0 = f(3\pi/2)$$

Por tanto cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Luego, existe un punto $c \in (\pi/2, 3\pi/2)$ tal que $f\,'(c) = 0$. Calculémoslo:

$$f\,'(x) = -6\cos x \operatorname{sen} x = -3 \operatorname{sen} 2x = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x = k\pi \quad\Rightarrow\quad x = \frac{k\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

El punto buscado es $c = \pi$, ya que es el punto que pertenece al intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$.

¿Puede aplicarse el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ en el intervalo $[0, \pi]$? Encontrar, si existe, un punto de $[0, \pi]$ en el cual se anule esta función.

Teorema de Bolzano. Si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos (por ejemplo, $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

La función $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0, \pi]$. Además:

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 1 \qquad \text{y} \qquad f(\pi) = \operatorname{sen} 2\pi + \cos 3\pi = -1$$

Luego verifica las hipótesis del teorema de Bolzano.

Por tanto, existe un punto tal que $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x = 0$.

A ojo, se ve que una solución de esa ecuación trigonométrica es $x = \pi/2$.

Nota: Hacemos un intento de resolución de la ecuación $\operatorname{sen}2x + \cos3x = 0$:

$$\operatorname{sen} 2x + \cos 3x = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \cos 2x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x\, 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \cos x(\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x\, 2\operatorname{sen} x) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \pi/2 + k\pi$$

Aunque hay más soluciones, a nosotros nos vale con encontrar una: $x = \pi/2$, que, como hemos dicho, puede verse a ojo.

Se considera la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Demostrar que existe algún número real $x \in (0, 1)$ tal que $f\,'(x) = x$.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad\Rightarrow\quad f\,'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Consideramos la función $F(x) = f\,'(x) - x = \dfrac{1}{1+x^2} - x$

Esta función es continua en $[0, 1]$. Además, $F(0) = 1$ y $F(1) = -\dfrac{1}{2}$. Luego, por el teorema de Bolzano, existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$. Por tanto:

$$F(c) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad F(c) = \frac{1}{1+c^2} - c = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1+c^2} = c \quad\Leftrightarrow\quad f\,'(c) = c$$

Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = e^{x^2-1}$ en el intervalo es [–1, 1]?¿Para qué valor α es $f'(\alpha) = 0$?

Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = e^{x^2-1}$ cumple las hipótesis anteriores en el intervalo $[-1, 1]$, ya que es continua y derivable en él y además:

$$f(-1) = e^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad f(1) = e^0 = 1$$

Por tanto:

$$f'(x) = 2x e^{x^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

El valor pedido es $\alpha = 0$.

Demostrar que, para cualquier valor de m, la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ no tiene dos raíces diferentes que pertenecen al intervalo [0, 1].

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 3x + m$ que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada, $f'(x) = 3x^2 - 3$, vale 0 en $x = -1$ y en $x = 1$.

Como f' es negativa para todo $x \in (-1, 1)$, la función es decreciente en todo el intervalo. En consecuencia, $f(x) = x^3 - 3x + m$ sólo puede cortar una vez, como máximo, al eje OX en el intervalo $(-1, 1)$. Por tanto, la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ sólo puede tener una raíz en ese intervalo.

Aplicar, si es posible, a la función $f(x) =$ sen x cos x en si el intervalo es $[0, \pi]$, el teorema de Rolle, dando $c \in (0, \pi)$ para el cual $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ es continua y derivable en toda la recta. En particular en el intervalo $[0, \pi]$. Además:

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 \ \cos 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad f(\pi) = \operatorname{sen} \pi \cdot \cos \pi = 0$$

Por tanto, puede aplicarse el teorema. En consecuencia, existe un punto $c \in (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$

$$f'(x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad x = \pi/4$$

El valor buscado es $c = \pi/4$

Nota: Hay otra solución: $c = 3\pi/4$

Aplicar el teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación $x = \cos x$ tiene al menos una solución dentro del intervalo $[0, \pi/2]$.

Consideramos la función $f(x) = x - \cos x$. Esa función es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0, \pi/2]$. Además:

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(\pi) = \pi - \cos \pi = \pi + 1 > 0$$

Luego verifica las hipótesis del teorema de Bolzano. Por tanto, existe un punto $c \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c) = 0$:

$$f(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = c - \cos c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \cos c$$

Esto es, la ecuación $x = \cos x$ tiene una solución que es c.

Calcula un punto el intervalo [1, 3] en el que la recta tangente a la curva $y = x^2 - x + 2$ es paralela a la cuerda que une los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 8)$.

El teorema del valor medio dice: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como la función $y = f(x) = x^2 - x + 2$ cumple las condiciones del teorema se tendrá:

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 2c - 1 \quad (\text{ya que } f'(x) = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 2c - 1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8-2}{3-1} = 3 = 2c - 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

El punto pedido es $x = 2$.

Considera la función:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ 3\cos(x-3) & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Estudia si es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.
b) Razona si se puede asegurar que existe un punto c en el intervalo [–2, 2] en el cual $f'(c) = 0$.

a) Veamos primero la continuidad. La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en los puntos $x = 0$ y $x = 3$, que es los que se cambia de un trozo a otro.

Si $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 0$
Si $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 0$

La función es continua en $x = 0$.

Si $x \to 3^- \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 3$
Si $x \to 3^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 3\cos 0 = 3$

La función es continua en $x = 3$.

Salvo en $x = 0$ y $x = 3$, su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -3\operatorname{sen}(x-3) & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Para $x = 0$:

Si $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to 1$
Si $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to 1$

La función es derivable en $x = 0$.

Para $x = 3$:

Si $x \to 3^- \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to 1$
Si $x \to 3^+ \quad \Rightarrow \quad f'(x) \to -3\operatorname{sen} 0 = 0$

La función no es derivable en $x = 3$.

La derivada es pues:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ -3\operatorname{sen}(x-3) & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

b) En el intervalo [–2, 2] la función es continua y derivable; en consecuencia cumple el teorema de Rolle, y existe un punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ese punto es la solución de:

$$2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Prueba que la función $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$ tiene al menos un mínimo relativo en el intervalo $(0, \pi)$.

La función $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$ es continua y derivable para todo x. Lo mismo le sucede a su derivada, $f'(x) = 2x - 2 - \operatorname{sen} x$. Como:

$$f'(0) = -2 < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(\pi) = 2\pi - 2 > 0$$

por el teorema de Bolzano, existe algún punto c entre 0 y π tal que $f'(c) = 0$. Este punto c será el punto singular de la función f.

La segunda derivada vale $f''(x) = 2 - \cos x$. Entonces:

$$f''(c) = 2 - \cos c > 0 \quad (\text{por ser } -1 \le \cos \alpha \le 1, \text{ para todo } \alpha)$$

Por tanto, c cumple las condiciones de mínimo relativo: $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$.