

Ejercicios resueltos

1.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$

1°. Se considera la función $f(x) = \frac{6}{2+\operatorname{sen}x} - 4$ continua en \mathfrak{R} luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del T^a Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{6}{2-1} - 4 > 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2+1} - 4 < 0$$

3°. Por tanto en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumplen las hipótesis del T^a de Bolzano, luego:

$\exists c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$ tiene una solución c en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2.- Demostrar que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1°. Se considera la función $f(x) = x^{18} - 5x + 3$ continua y derivable en \mathfrak{R} luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del T^a Bolzano:

$$f(0) = 3 > 0 \quad f(1) = -1 < 0 \quad f(2) > 0$$

3°. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del T^a de Bolzano, luego:

$\exists c \in (0,1)$ y $\exists c' \in (1,2)$ tal que $f(c) = f(c') = 0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ tiene 2 soluciones en \mathfrak{R}

3.- Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + a = 0$ con $a \in \mathfrak{R}$ tiene a lo más una solución en $[-1,1]$.
¿Para que valor de a existe dicha solución?

1°. Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x + a$ continua y derivable en \mathfrak{R} luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se supone que hay más de 1 solución:

$$\text{hay 2 soluciones, } c_1, c_2 \in [-1,1] \text{ tales que } f(c_1) = f(c_2) = 0$$

Luego en el intervalo $[c_1, c_2]$ se cumplen las hipótesis del T^a Rolle por lo que

$$\exists d \in (c_1, c_2) \subset [-1,1] \text{ tal que } f'(d) = 0 \text{ que equivale a decir } d \in (-1,1)$$

Veamos que pasa con la función derivada:

$$f(x) = x^3 - 3x + a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \notin (-1,1) \text{ en contradicción con } d \in (-1,1)$$

Por tanto a lo sumo existe una solución de la ecuación.

3°. ¿Para que valor de a existe dicha solución? Se tiene que cumplir el T^a Bolzano en $[-1,1]$:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 + 3 + a = a + 2 \\ f(1) = 1 - 3 + a = a - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (a + 2) \cdot (a - 2) < 0 \Rightarrow a \in (-2, 2)$$

4.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$

1º. Se considera la función $f(x) = \frac{6}{2+\operatorname{sen}x} - 4$ continua en \mathbb{R} luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tº Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{6}{2-1} - 4 > 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2+1} - 4 < 0$$

3º. Por tanto en el intervalo $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se cumplen las hipótesis del Tº de Bolzano, luego:

$\exists c \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$ tiene una solución c en el intervalo $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

5.- Demostrar que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1º. Se considera la función $f(x) = x^{18} - 5x + 3$ continua y derivable en \mathbb{R} luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del Tº Bolzano:

$$f(0) = 3 > 0 \quad f(1) = -1 < 0 \quad f(2) > 0$$

3º. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del Tº de Bolzano, luego:

$\exists c \in (0,1)$ y $\exists c' \in (1,2)$ tal que $f(c) = f(c') = 0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18} - 5x = -3$ tiene 2 soluciones en \mathbb{R}

4º. Solo hay 2:

Se supone que hay 3 soluciones: $\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ con $c_1 < c_2 < c_3$ tales que $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$

En los intervalos $[c_1, c_2]$ y $[c_2, c_3]$ se cumplen las hipótesis del Tº Rolle, luego:

$\exists d \in (c_1, c_2)$ y $d' \in (c_2, c_3)$ tales que $f'(d) = f'(d') = 0$ pero $f'(x) = 18x^{17} - 5 = 0$ que solo tiene una solución real $x = \sqrt[17]{\frac{5}{18}}$ en contradicción con la suposición, por tanto solo hay 2

6.- La función $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo: $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$ $f(1) = \sqrt[3]{1^2} = 1$

Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Si intentamos anular la derivada resulta: $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ absurdo!

Esto no contradice el teorema de Rolle porque la segunda hipótesis no se verifica: la función no es derivable en todos los puntos del intervalo, en el punto $x = 0$ no existe la derivada como podemos ver calculándola a través del límite:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1-\frac{2}{3}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty$$

7.- Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde se cumple la tesis?

→ Por ser una función polinómica, es continua y derivable en todo \mathbb{R} y se cumplen las dos primeras hipótesis.

→ Tercera hipótesis: $\left. \begin{matrix} f(0) = 2 \\ f(b) = b^3 - 9b + 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b^3 - 9b + 2 = 2 \Rightarrow b^3 - 9b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 9) = 0$

$$b(b^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{La única solución válida es } b = 3$$

→ La tesis se cumple: $f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} \in (0, 3)$

8.- Prueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ Cumple las hipótesis del T^o de Rolle. Averigua dónde cumple la tesis.

En cada uno de los intervalos es una función polinómica que es continua y derivable en \mathbb{R}

El único punto dudoso es $x = 1 \Rightarrow$ estudiamos la continuidad y derivabilidad en dicho punto

★ f continua en $x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \Rightarrow$

Se cumple la 1^a hipótesis: f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$

★ f derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 < x < 4 \\ ? & x = 1 \end{cases}$$

$$f \text{ derivable en } x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2 \Rightarrow$$

Se cumple la 2^a hipótesis: f es derivable en $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

★ $\left. \begin{matrix} f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 2 = 1 \\ f(4) = 5 - (4 - 2)^2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ se cumple la 3^a hipótesis

★ Veamos dónde se verifica la tesis: $f'(x) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 \leq x < 4 \end{cases}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 & \text{absurdo} \\ -2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \in [1, 4] \end{cases} \Rightarrow \text{La tesis se verifica en } c = 2$$

9.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ A \cdot e^x + B & x > 0 \end{cases}$
 Calcula "A" y "B" para que f cumpla las hipótesis del T^a de Lagrange en $[-1,1]$

La función es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ puesto que los trozos lo son luego para que se cumplan las hipótesis del T^a se tiene que cumplir la continuidad y derivabilidad en $x = 0$

★ f continua en $x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 0 = A + B$

★ f derivable en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ A \cdot e^x + B & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ A \cdot e^x & x > 0 \\ \exists & x = 0 \end{cases}$$

$$f \text{ derivable en } x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \Rightarrow 1 = A \stackrel{A+B=0}{\Rightarrow} B = -1$$

10.- Prueba que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y calcula el o los valores vaticinados por el teorema.

★ La función es continua en el intervalo $[0,2]$

➤ $y = \frac{3-x^2}{2}$ continua en \mathbb{R} (es polinómica) $\Rightarrow f$ continua en $x < 1$

➤ $y = \frac{1}{x}$ continua en \mathbb{R}^* $\Rightarrow f$ continua en $x > 1$

➤ f continua en $x = 1$ porque $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

★ La función es derivable en el intervalo $(0,2) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ ? & x = 1 \end{cases}$

➤ $y = \frac{3-x^2}{2}$ derivable en \mathbb{R} (es polinómica) $\Rightarrow f$ derivable en $x < 1$

➤ $y = \frac{1}{x}$ derivable en \mathbb{R}^* $\Rightarrow f$ derivable en $x > 1$

➤ f derivable en $x = 1$ porque $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -1$

★ El valor o valores que vaticina el teorema del valor medio: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1-3}{2}-\frac{1-3}{2}}{2-0} = \frac{-1}{2} = \begin{cases} -c & \text{si } x < 1 \\ \frac{-1}{c^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{2} = -c & \text{si } c < 1 \\ \frac{-1}{2} = \frac{-1}{c^2} & \text{si } c \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} & \text{si } c < 1 \\ c = \pm\sqrt{2} & \text{si } c \geq 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \text{ y } c = \sqrt{2}$$

11.- Calcula aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^2 x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \frac{0}{0}$ indeterminación L'Hôpital = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - b^x \cdot \ln b}{1} = \ln a - \ln b$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = 0 \cdot \infty \text{ ind} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}$ indet L'Hôp = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

Las indeterminaciones $0 \cdot \infty$ se transforman en $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ y se pueden resolver por L'Hôpital

★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) = [0^0 \text{ indeterminación}] = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$

★ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = [\infty^0 \text{ ind}] = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ ind L'Hôpital} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$

★ $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = [1^\infty \text{ indeterminación}] = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} -1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Se ha aplicado la fórmula: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = [1^\infty \text{ ind}] = e^{\lim_{x \rightarrow a} [(f(x)-1) \cdot g(x)]}$

→ Otra forma de hacerlo es:

$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} \cdot \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left[\frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$

Así: $\ln L = -1 \Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}$

★ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty \text{ ind. L'Hôpital}] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \right) = \left[\frac{0}{0} \text{ ind. L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$
 $= \left[\frac{0}{0} \text{ ind. L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} = \frac{1}{2}$

Las indeterminaciones $\infty - \infty$ se transforman en $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ y se pueden resolver por L'Hôpital

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \left[\frac{0}{0} \text{ ind. L'Hôpital} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{0}{2} = 0$

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{\sin x} =$
 $= \left[\frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$

★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left[\frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

Ejercicios propuestos

1.- Determina los extremos absolutos de la función $f : [0,8] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x^2}$

2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

- A. Estudia si f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[2,4]$
- B. Estudia si f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,3]$
- C. Si f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en alguno de los intervalos de los apartados anteriores, determina el punto correspondiente cuya existencia se afirma en dicho teorema

3.- Demostrar que la ecuación $x^2 = x \cdot \text{sen}x + \text{cos}x$ tiene exactamente dos soluciones en $[-\pi, \pi]$

4.- Demuestra que la siguiente función nunca tiene dos raíces en el intervalo cerrado $[0,1]$:

$$f_m(x) = x^3 - 3x + m$$

- a) Si "n" es par entonces el polinomio p no puede tener más de dos raíces reales .
- b) Si "n" es impar entonces el polinomio p no puede tener más de tres raíces reales .

6.- Demuestra que la ecuación $\ln x - \frac{x}{2} = -3$ tiene al menos una solución real

7.- a) Sea $f : [-1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + 10$

Determina todos los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-1, f(-1))$ y $B(2, f(2))$. ¿Cuál de ellos es el predicho por el T^a de Lagrange en el intervalo $[-1,2]$?

b) Considera $f : [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + \text{sen}x$. Comprueba si f cumple las hipótesis del T^a y, en caso afirmativo, encuentra dichos valores .

8.- Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)x}{1-x} & x < 0 \\ \frac{2x}{1+ax} & x \geq 0 \end{cases}$ Sol : a=1

Calcular " a " para que ésta función cumpla las hipótesis del T^a del valor medio de Lagrange en el intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$ (Sol : valor vaticinado $c_1 = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$)

9.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \text{sen}x}{x^3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$.

- a) ¿ Para que valor de " a " será continua en $x = 0$?
- b) ¿ Se puede aplicar el T^a de Lagrange en $[-1,1]$?

10.- ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ en el intervalo $[0, 4]$? Razónalo

11.- Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del

valor medio en el intervalo $[2, 6]$. ¿Dónde cumple la tesis? (Solución: $a = 2$; $b = 19$; $c = \frac{9}{2}$)

12.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

- a. Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en $[-4, 2]$
- b. Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

13. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}x}{x^3}$ (Solución 1/6) b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{arctg}x - x}{2x - \text{arcsen}x}$ (Solución: 1) c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^2 \cdot \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \right]$ (Solución: $\frac{1}{2}$)