TEOREMA DE BOLZANO

1) Demuestra que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene raíces reales.

2) Demuestra que la ecuación $x \cdot \cos\frac{x}{2} + 15 senx = 0$ tiene alguna raíz.

3) Prueba que la ecuación $x^2 = 18\ Ln(x)$ posee al menos una raíz real.

4) ¿Posee la ecuación $x \cdot \ln x - 1 = 0$ alguna solución en el intervalo $[1,e]$?

5) Dada la ecuación $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$, encontrar tres intervalos cerrados de forma que en el interior de cada uno de ellos haya una raíz de la ecuación.

6) Demuestra que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene una única raíz real.

7) Comprueba que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres raíces reales.

SOLUCIONES

1) f(x)= $x^3 + 6x^2 + 15x - 23$ es continua en R, función polinómica

$$\begin{array}{l} f(0) = -23 < 0 \\ f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 39 > 0 \end{array} \rightarrow$$ teorema de Bolzano, $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo (1,2)

2) $f(x) = x \cdot \cos\frac{x}{2} + 15 sen\, x$ función continua, ya que sen x, cos x y x lo son en R

$f(0) = 0 \cdot 1 - 15 \cdot 0 = 0$ o sea, que 0 es solución de la ecuación

3) $f(x) = x^2 - 18 \ln x$ función continua en $(0,+\infty)$, por ser producto y resta de funciones continuas en ese intervalo

$$\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(e) = e^2 - 18 < 0 \end{array} \rightarrow$$ teorema de Bolzano, $x^2 = 18\ln x$ tiene al menos una raíz en el intervalo (1,e)

4) f(x) = x · lnx – 1 función continua en $(0,+\infty)$, por ser producto y resta de funciones continuas en ese intervalo

$$\begin{array}{l} f(1) = -1 < 0 \\ f(e) = e - 1 > 0 \end{array} \rightarrow$$ teorema de Bolzano, x.lnx-1 = 0 tiene al menos una raíz en el intervalo (1,e)

5) $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$ es continua en R, función polinómica

$$\begin{array}{l} f(0) = -10 < 0 \\ f(1) = -4 < 0 \\ f(2) = 18 > 0 \end{array} \rightarrow$$ T. de Bolzano, $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene al menos una raíz en (1,2)

$$\begin{array}{l} f(-1) = -6 < 0 \\ f(-2) = 2 > 0 \end{array} \rightarrow$$ T. de Bolzano, $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene al menos una raíz en (-2,-1)

$$\begin{array}{l} f(-4) > 0 \\ f(-5) < 0 \end{array} \rightarrow$$ T. de Bolzano, $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene al menos una raíz en (-5,-4)

6) f(x) = $x^3 + 6x^2 + 15x - 23$ es continua en R, función polinómica

teorema de Bolzano, $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo (1,2) (ejercicio 1), pero tenemos que probar que tiene SÓLO una, para ello vamos a estudiar el crecimiento de la función: $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 = 0$

$x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 180}}{6}$ no tiene solución, vemos que $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 > 0$ siempre, lo que significa que la función f es creciente, por lo que SÓLO puede cortar una vez al eje OX

7) f(x) = $x^3 - 3x + 1$ es continua en R, función polinómica

$\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -2 < 0 \end{array} \rightarrow$ T. de Bolzano, $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en (0,1)

$\begin{array}{l} f(-1) = 1 > 0 \\ f(-2) = -13 < 0 \end{array} \rightarrow$ T. de Bolzano, $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en (-2,-1)

$\begin{array}{l} f(1) = -2 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array} \rightarrow$ T. de Bolzano, $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en (1,2)

hemos encontrado tres intervalos y, como es un polinomio de grado 3, tiene como máximo tres raíces reales, las cuales están una en cada uno de los intervalos encontrados.