TEOREMAS ANÁLISIS FICHA 2

1) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & si\ x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si\ x>1 \end{cases}$

Hallar a para que se pueda aplicar el teorema del valor medio de Lagrange en [0,2]. Calcular el/los c vaticinados por el teorema.

2) Estudia si la siguiente función verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2,0]$

$$f(x)=\frac{1}{1+|1+x|}$$

3) Prueba que existe un punto P de la gráfica de la función $f(x)=4x^2-1$ tal que la tangente a dicha gráfica en P es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(1’5,8).

4) Demuestra que la función $f(x)=e^x+x$ tiene una raíz única.

5) Sea f una función definida en el intervalo [-1,1] y dos veces derivable, tal que f´´(x) = x. Además se cumple que f´(0)=f(0)=1. Calcula cuántos ceros tiene exactamente la función f en el intervalo (-1,1)

SOLUCIONES

1) $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & si\ x\le 1\\ \dfrac{2}{ax} & si\ x>1\end{cases}$ tiene que ser continua en [0,2] y derivable en (0,2)

Continuidad: cada trozo es continuo, pero también tiene que serlo en x = 1

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=3-a\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(3-ax^2)=3-a\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{ax}=\dfrac{2}{a}\end{array}\right\}\Rightarrow 3-a=\frac{2}{a}\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=\left\langle\begin{array}{l}1\\2\end{array}\right.$$

Derivabilidad, cada trozo es derivable, pero también tiene que serlo en x = 1

$$f'(x)=\begin{cases}-2ax & si\ x<1\\ -\dfrac{2}{ax^2} & si\ x>1\end{cases}\Rightarrow -2a=-\frac{2}{a}\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1$$

luego f es continua y derivable para a =1, hallemos c: $f'(x)=\begin{cases}-2x & si\ x\le 1\\ -\dfrac{2}{x^2} & si\ x>1\end{cases}$

$$\exists\, c\in(0,2)/\ f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}\to\begin{cases}-2c=\dfrac{1-3}{2}\to c=\dfrac{1}{2}\in(0,2)\\ -\dfrac{2}{c^2}=-1\to c=\pm\sqrt{2}\to c=\sqrt{2}\in(0,2)\end{cases}\quad \text{dos c}$$

2) Teorema de Rolle, tiene que ser continua en $[-2,0]$, derivable en $(-2,0)$ y además tiene que cumplirse que $f(-2)=f(0)$

$f(-2)=\dfrac{1}{1+|-1|}=\dfrac{1}{2}$**;** $f(0)=\dfrac{1}{2}$ **SI**

Continuidad: f es cociente de dos funciones continuas y NO es continua donde se anula el denominador, pero éste no se anula para ningún valor de x, luego **f es continua en el intervalo dado** $[-2,0]$

Derivabilidad: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+1+x} & si\ 1+x\ge 0\\ \dfrac{1}{1-(1+x)} & si\ 1+x<0\end{cases}\to f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2+x} & si\ x\ge -1\\ -\dfrac{1}{x} & si\ x<-1\end{cases}$

$f`(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(2+x)^2} & si\ x>-1\\ \dfrac{1}{x^2} & si x<-1\end{cases}\to f'(-1^+)=\dfrac{-1}{1}=-1\ne f'(-1^-)=1$ **NO** derivable

NO cumple las hipótesis del teorema del Valor Medio

3) $f(x)=4x^2-1$, función polinómica, continua y derivable en R, en particular en el intervalo (1,1’5), luego podemos aplicar en dicho intervalo el teorema del valor medio. $f'(x)=8x$

$$\exists\, c\in(1,1'5)/\ f'(c)=\frac{f(1'5)-f(1)}{1'5-1}\rightarrow 8c=\frac{8-3}{0'5}\rightarrow c=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}\in(1,1'5)$$

4) $f(x)=e^x+x$ es una función continua en R (exponencial + polinómica), podemos aplicar el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo que encontremos en que la función cambie de signo, veamos:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(-1)=\frac{1}{e}-1<0 \end{array}\right\}\rightarrow \exists c\in(-1,0)/\ f(c)=0$$ (AL MENOS UN c)

para probar que es exactamente una la raíz real, estudiamos el crecimiento de la función dada: $f'(x)=e^x+1>0$ en todo R $\rightarrow$ f es creciente en R $\rightarrow$ solución única

5) $f''(x)=x\rightarrow f'(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$

$$f(0)=f'(0)=1\Rightarrow\frac{0}{2}+C=1\Rightarrow C=1$$

$$f(x)=\int\frac{x^2}{2}+1=\frac{x^3}{6}+x+k\rightarrow\ f(0)=1\Rightarrow\frac{0}{6}+0+k=1\Rightarrow k=1$$

La función es: $f(x)=\frac{x^3}{6}+x+1$ ahora, vamos a hallar el número de ceros en el intervalo (-1,1) , primero veamos que tiene algún cero, utilizando el teorema de Bolzano:

f es continua en [-1,1], ya que es una función polinómica

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\frac{1}{6}+1+1>0 \\ f(-1)=-\frac{1}{6}-1+1<0 \end{array}\right\}\rightarrow\exists c\in(-1,1)/\ f(c)=0$$ al menos uno

Por otra parte sabemos $f'(x)=\frac{x^2}{2}+1>0$ siempre $\rightarrow$ f es creciente , por lo que la función tiene un único cero en el intervalo (-1,1)