INTEGRAL DEFINIDA

APLICACIÓN al CÁLCULO de ÁREAS

Isaac Barrow (1630-1677), teólogo y matemático inglés, maestro de Newton y precursor de la regla que lleva su nombre.

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

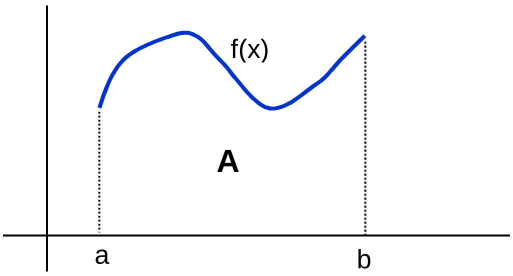
I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

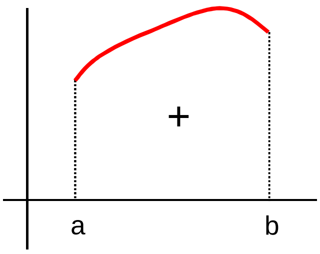
I) CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

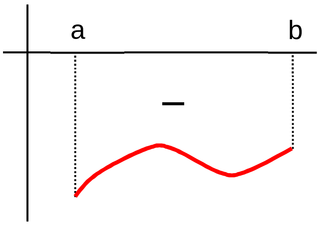
DEF: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{área del recinto limitado por la curva } f(x)\text{, el eje x, y las rectas verticales } x=a \text{ y } x=b}$

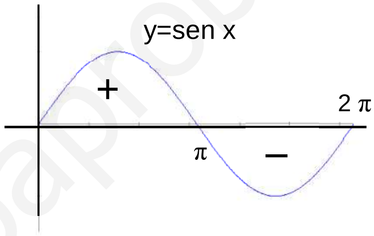
Gráficamente, coincide con el área A del dibujo[1]:



Signo de la integral definida: Hay 3 posibilidades:







Cuando la curva está por encima del eje x, el área es positiva (lógico pues f(x)>0 en ese caso.

Si está por debajo, entonces la integral definida es negativa (ya que entonces f(x)<0)

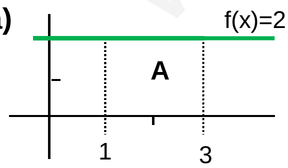
p.ej. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$

¿Cómo se calcula?: Mediante la **REGLA DE BARROW**[2]: se trata de hallar una primitiva F(x) mediante los procedimientos del tema anterior, y a continuación valorarla entre los extremos a y b:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Ejemplos justificativos:

a)



$A = \int_1^3 2\,dx =$

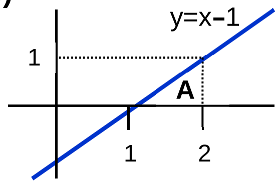
(Puede comprobarse el resultado gráficamente)

---

[1] La definición anterior puede entenderse intuitivamente si pensamos que f(x)·dx representaría el área de un rectángulo infinitesimal de altura f(x) y anchura tan pequeña como queramos dx, por lo que la integral definida vendría a ser la suma de esos infinitos pequeños rectángulos. Para una comprensión más rigurosa de este hecho puede buscarse la entrada "Integral de Riemann" en Internet.

[2] *Isaac Barrow* (1630-1677), eminente matemático inglés y profesor de *Isaac Newton* en Cambridge. Puede encontrarse en Internet fácilmente la justificación de esta regla, que se conoce como *2º Teorema Fundamental del Cálculo Integral.*

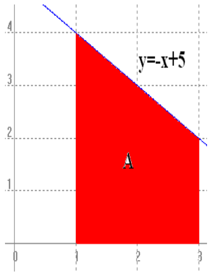
b)



$$A=\int_1^2 (x-1)\,dx=$$

Compruébese que el área A del triángulo es efectivamente la calculada:

c)



$$A=\int_1^3 (-x+5)\,dx=$$

Podemos comprobar que coincide con área A del trapecio, la cual viene dada por:

$$A=\frac{B+b}{2}h=$$

Nótese, por consiguiente, que la integral definida tiene una utilísima aplicación al cálculo de áreas.

Ejercicio: Comprobar por Barrow que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}x\,dx=0$

Ejercicios PAEG: Teórico-prácticos: sept 2008 2A, jun 2014 2B
Prácticos: jun 2009 2B, jun 2014 2A, jun 2008 2B
Ejercicios final tema: 1 a 10

II) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1) Si $c\in[a,b]$: $\boxed{\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f}$ Esta propiedad nos será muy útil a la hora de hallar el área de un recinto compuesto como suma de dos o más subáreas. Su justificación es trivial, tanto gráficamente como aplicando la regla de Barrow.

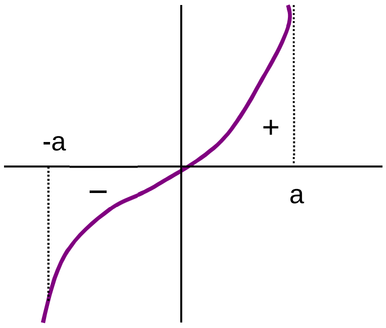
2) $\boxed{\int_a^a f=0}$ Obvio y fácil de probar.

3) $\boxed{\int_a^b f=-\int_b^a f}$ Puede demostrarse aplicando la regla de Barrow.

4) $\boxed{\int_a^b f\pm\int_a^b g=\int_a^b f\pm g}$ Es una consecuencia inmediata de una propiedad análoga de la integral indefinida. Una aplicación de esto es el **ejercicio 9** del final del tema.

5) $\boxed{\int_{-a}^{a} \text{función impar} = 0}$

La interpretación gráfica es obvia:



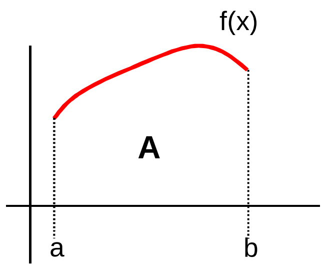
Las dos áreas son iguales pero de signo opuesto, por lo que su suma es cero.

Por ejemplo, podemos concluir que $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \text{senx}\, dx = 0$ sin necesidad de hacer la integral.

III) ÁREA BAJO f

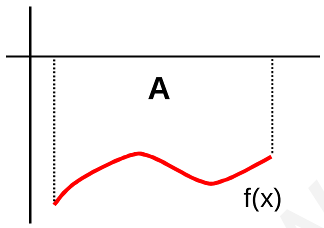
En cada uno de los tres casos vistos en el apartado I habrá que proceder de forma distinta:

1) f es positiva:



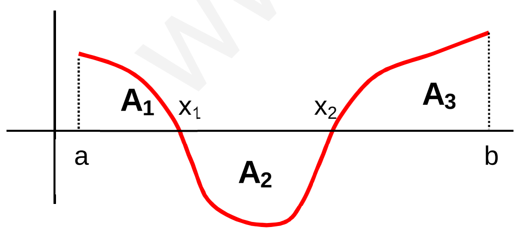
$A = \int_a^b f(x)\, dx$ (por la propia definición de la integral definida)

2) f es negativa:



$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$ o bien: $A = -\int_a^b f(x)\, dx$

3) f es positiva y negativa (se alterna):



por la propiedad 1

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^{x_1} f + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \int_{x_2}^{b} f$$

NOTA: En general **habrá que hallar los puntos en que f(x) corta al eje x** (x_1 y x_2 en el ejemplo anterior) **pues no sabemos de antemano si f(x) cambia de signo**[3]. También, a veces conviene representar f(x), pues puede formar con respecto al eje x dos o más subáreas (ver p. ej. ejercicio 15 del final del tema)

[3] Recordar que para obtener los puntos en que una función corta al eje x hay que resolver la ecuación f(x)=0

Ejemplo: Hallar el área limitada por la parábola $y=x^2-4x$ y el eje x (Un esbozo de la gráfica no es obligatorio, pero puede ser útil…)

Nótese que en este ejemplo la integral en sí resulta negativa, pues la parábola está por debajo del eje x, pero el valor absoluto la convierte en **positiva**, como debe ser **por tratarse de un área.**

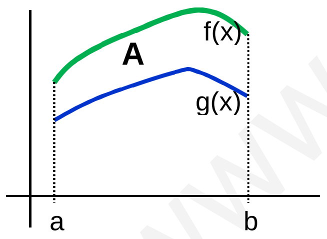
NOTA: Si nos pidieran el **área respecto al eje y**, entonces intercambiaríamos la x con la y (véase el ejercicio 38), ¡pero no olvidemos que los límites de integración estarán ahora en el eje y! Todo esto puede comprobarse gráficamente mirando al trasluz la hoja en la que hemos dibujado el recinto.

Ejercicios PAEG: 1B sept 2004, 1A jun 2004, 2B sept 2008, 2B sept 2009
Ejercicios final tema: 11 a 18

IV) ÁREA LIMITADA POR DOS CURVAS

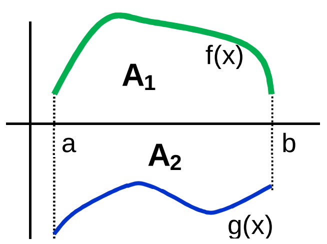
Existen tres posibilidades:

1) Ambas curvas son positivas[4] y no se cortan:



$$A=\int_a^b f-\int_a^b g=\int_a^b (f-g)$$

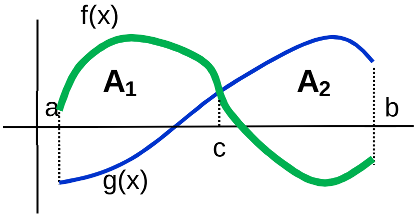
2) Ambas curvas son de distinto signo y no se cortan:



$$A_T=A_1+A_2=\int_a^b f-\int_a^b g=\int_a^b (f-g)$$

[4] Nótese que llegaríamos a la misma fórmula si ambas curvas fueran negativas, es decir, situadas bajo el eje X

3) Ambas curvas se cortan:



En este caso hay que hallar los puntos de corte y separar en varias integrales; por ejemplo, en el caso de la figura:

$$A_T = A_1 + A_2 = \int_a^c (f-g) + \int_c^b (g-f)$$

Como conclusión, en general tendremos que resolver previamente el sistema formado por ambas funciones para hallar el punto o los puntos donde se cortan. Además, conviene dibujar el recinto pues a veces hay que hallar el área pedida como suma de varias subáreas, por dos razones: o bien porque se obtienen dos o más recintos separados (p. ej. ejercicio 26 b del final tema), o bien porque se obtiene un recinto único delimitado superior e inferiormente por curvas distintas (problemas 34 y ss. final tema, o junio 97 2A).

Ejemplo: Problema 4B sept 97

NOTA: En algunos problemas, una vez dibujado el recinto, convendrá intercambiar la x con la y para hacer lo anterior con respecto al eje y (como en el problema 1B junio 98). Otra solución puede ser subdividir el recinto en sectores.

Ejercicios final tema: 19 y ss.
Ejercicios PAEG (por orden de complejidad):

- **Área de un recinto:** jun 2012 2A, jun 2001 1A, jun 2003 3A, jun 99 1B, sept 99 4B, sept 2007 2B, jun 2007 2B, sept 2006 2B, jun 2006 2B, jun 2010 2A, sept 2013 2B
- **Hallar previamente la recta tangente:** sept 98 2A, jun 2002 3A
- **Valor absoluto**: sept 2000 1A, sept 2002 4A
- **Varios recintos:** sept 2012 2B, jun 2011 2B, jun 2000 4A, Jun 97 2A, jun 98 1B (área respecto al eje y), sept 98 2A, sept 2014 2A
- **Con parámetro:** sept 2011 2B, jun 2013 2A (+ recta tangente)

45 EJERCICIOS de INTEGRAL DEFINIDA	2º BACH.

Integral definida:

1. Enunciar la regla de Barrow. Calcular: $\int_1^3 |x|dx$ *(Soluc: 4)*

2. Calcular: $\int_0^1 x\sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{(a^2+b^2)^3}-a^3}{3b^2}\right)$

3. **(S)** Calcular: $\int_0^2 |2x-1|dx$ *(Soluc: 5/2)*

4. Calcular: $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\,senx^2\,dx$ *(Soluc: 1/2)*

5. Calcular: $\int_0^1 x\,arctg\,x\,dx$ *(Soluc: π/4-1/2)*

6. Calcular: $\int_0^1 (x^2+1)e^{-2x}\,dx$ $\left(Soluc: \frac{3}{4}-\frac{7}{4e^2}\right)$

7. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ $\left(Soluc: ln\frac{4}{3}\right)$

8. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$ $\left(Soluc: ln\sqrt[3]{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)$

9. Hallar el valor de $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,sen\,x\,dx$ sin necesidad de integrar, **razonadamente**. *(Soluc: 0)*

10. Sean: $a=\int_0^{\pi/2} x\,sen^2x\,dx$ $b=\int_0^{\pi/2} x\cos^2x\,dx$

Calcular **a+b** y **a–b** y obtener los valores de **a** y **b**. *(Soluc: a=(π²+4)/16; b=(π²-4)/16)*

Área bajo una curva:

11. Calcular el área limitada por la curva $y=\frac{1}{x^2+4}$, las rectas x=2, x=$2\sqrt{3}$ y el eje x. *(Soluc: π/24 u²)*

12. Hallar los valores de a, b y c en el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ de forma que P(1)=4, P'(1)=8 y P(2)+15P(0)=0 Representar la función y calcular el área finita comprendida entre la curva y el eje x.

(Soluc: P(x)=3x²+2x-1; 32/27 u²)

13. Calcular el área limitada por la curva $y=\ln^2 x$, las rectas x=1, x=e^2 y el eje x. *(Soluc: 2e²-2 u²)*

14. Calcular el área limitada por la curva $y=\sqrt{1-x^2}$ y las rectas y=0, x=0, x= $\sqrt{2}$ /2. *(Soluc: (π+2)/8 u²)*

15. Calcular el área comprendida entre la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva. *(Soluc: π/3 u²)*

16. Dada la función $y=\frac{x}{x^2+2}$, calcular el área encerrada por la curva, el eje x y las rectas perpendiculares al eje x que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada. *(Soluc: Ln2 u²)*

17. Considerar la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } -2\le x<0 \\ 2x & \text{si } \ 0\le x<2 \\ 10-3x & \text{si } \ 2<x\le 4 \end{cases}$. Representarla y calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ **b)** $\int_{1}^{4} f(x)dx$ **c)** $\int_{-2}^{4} f(x)dx$

18. Considérese la función

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si } 0\le t\le 1 \\ 1 & \text{si } \ 1\le t\le 2 \end{cases}$$

y sea $F(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt \qquad 1\le x\le 2$

a) Hallar una expresión explícita para F(x) *(Soluc: F(x)=x-1)*

b) Dibujar F(x)

Área entre dos curvas:

19. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las líneas y=x, y=x(6−x) *(Soluc: 125/6 u²)*

20. Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas $y=x^2$, $y=-2x^2+3$ *(Soluc: 4 u²)*

21. Dibujar la curva $y=x^2-3x-10$, y calcular el área del recinto limitado por esta curva y la recta y=2x−4 *(Soluc: 343/6 u²)*

22. Hallar el área de la región limitada, para x>0, por $y=x^3$ y la recta y=8x *(Soluc: 16 u²)*

23. Calcula el área comprendida entre las curvas $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$ y $g(x)=x^4+4x^3-8x^2+4x-1$, sin necesidad de representarlas. *(Soluc. 37/12 u²)*

24. Sean $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x)=|1-x|$. **a)** Dibujar sus gráficas en los mismos ejes y hallar sus puntos de intersección. **b)** Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas. *(Soluc. 13/24 u²)*

25. Calcular el área de la región del semiplano $y\ge 0$ limitada por la curva y=Ln x, su tangente en x=1 y la recta x=3. *(Soluc: la tangente es y=x−1; el área es 4−3Ln3 u²)*

26. a) Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ *(Soluc: 1/3 u²)*

b) Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^3$ e $y=\sqrt[3]{x}$ *(Soluc: 1 u^2)*

c) Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^2$ e $y=\sqrt[3]{x}$ *(Soluc: 5/12 u^2)*

27. Hallar el área de la región acotada del plano limitada por las parábolas $y=x^2-x$, $y^2=2x$. *(Soluc: 2 u^2)*

28. Calcular el área de la región situada entre la recta x=1 y las curvas $y=x^2$ e $y=8/x$ *(Soluc: 8Ln2–7/3 u^2)*

29. Hallar el área del recinto acotado por las curvas $y=x^3$, $y=16/x$ y la recta x=1 *(Soluc: 16ln2-15/4 u^2)*

30. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y=e^{3x}$ y la cuerda de la curva que une el punto de abscisa x=0 con el de abscisa x=1 *(Soluc: $(e^3+5)/6$ u^2)*

31. Sea a>0. Hallar, en función de a, el área limitada por la parábola $y=x^2$ y la recta y=ax *(Soluc: $a^3/6$ u^2)*

32. Se considera la función $y=\frac{2x^2}{9-x^2}$

a) Dibujar su gráfica indicando su dominio de definición.

b) Calcular el área de la región acotada limitada por la curva anterior y la recta *y=1* *(Soluc: $6[\sqrt{3}+\ln(2-\sqrt{3})]$ u^2)*

33. Hallar el área del recinto limitado por y=1 e $y=\frac{-5}{x^2-9}$ $\left(\mathit{Soluc}: 4-\frac{5}{3}\mathit{Ln}\,5\right)$

Varios recintos (más elaborados):

34. Hallar el área de las regiones comprendidas entre la curva $y=x^2$ y las rectas y=x, x=0, x=2 *(Soluc:1 u^2)*

35. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=x^{1/3}$ entre x=–1 y x=1 *(Soluc:3/2 u^2)*

36. Calcular el área del recinto limitado por las rectas y=x, y=2x y la parábola $y=x^2$ *(Soluc: 7/6 u^2)*

37. Calcular el área limitada por la gráfica de la función f(x)=Ln x, el eje x y la recta tangente a dicha gráfica en el punto x=e. *(Soluc: (e–2)/2 u^2)*

38. Se considera la función $y=x^{3/2}$

a) Dibujar la gráfica.

b) Calcular la recta tangente en x=1 a la gráfica dibujada y calcular el área limitada por dicha gráfica, la tangente y el eje x. *(Soluc: tangente: 3x–2y–1=0; área=1/15 u^2)*

39. Hallar el área limitada por la curva $x=16-y^2$ y el eje y *(Soluc: 256/3 u^2)*

40. Hallar el valor de la constante **b** para que la función $f(x)=x^3-2x^2+bx$ tenga por tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante. Calcular entonces el área de la región limitada por esa tangente y la gráfica de f. *(Soluc: b=1; 4/3 u^2)*

41. Hallar el valor del parámetro **a** para que el área limitada por las gráficas de las funciones $f_1(x)=\sqrt{ax}$ y $f_2(x)=x^2/a$ en el primer cuadrante sea igual a tres unidades. *(Soluc: a=3)*

42. Sabiendo que el área comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta y=bx es 1, calcular el valor de **b**.
(Soluc: $b=1/\sqrt[3]{3}$)

43. Calcular el valor de **a** sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y=x^2+ax$ y la recta y+x=0 es 36
(Soluc: a=5)

44. Hallar el área del recinto limitado por $f(x)=|x^2-4|$ y **a)** g(x)=4. Dibujar dicho recinto. $\left(Soluc: \frac{64\sqrt{2}-64}{3}\right)$

b) g(x)=x+2. Ídem.

c) g(x)=5. Ídem.

45. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y=x^2$, $y=x^2/3$ e $y=-x+6$ **en el 1er cuadrante**, y hallar su área.
(Soluc: 59/18 u^2)

Volumen de revolución:

46. *(S)* Calcular el volumen del cuerpo que se obtiene al girar la curva $y=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ en torno al eje x, entre x=0 y x=√2. *(Soluc: $\pi^2\sqrt{2}/8\ u^3$)*

47. *(S)* Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x el recinto limitado por la gráfica de la función $y=\sqrt{x}\ \mathrm{sen}x,\ 0\le x\le\pi$, y el eje x. *(Soluc: $\pi^3/4\ u^3$)*

Función integral:

48. *(S)* Hallar el punto del intervalo [0,2] en el que la función $F(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt$ alcanza su valor mínimo. *(Sol: x=1)*

49. *(S)* Sea $F(x)=\int_0^{2x} e^{t^2}dt$. Hallar el valor de $F'(0)$. *(Soluc: F'(0)=2)*

50. *(S)* Sea F(x) la función definida por $F(x)=\int_1^{e^x-x-1} e^{-t^2}dt$. Hallar los puntos en que se anula la función F'(x). *(Soluc: x=0)*