LOGARITMOS

1.- Concepto

El ***logaritmo en base a de un número*** *N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número. Es decir:*

$$\boxed{\mathbf{Log}_a\, \mathbf{N = x \Leftrightarrow si\ a^x = N}}$$

- *Ejemplos:*

  $\text{Log}_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$

  $\text{Log}_{10} 1000 = 3$ ya que $10^3 = 10000$

  $\text{Log}_3 243 = 5$ ya que $3^5 = 243$

  $\log_{\frac{1}{2}} 0{'}25 = 2$ ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{'}25$

Los logaritmos en base 10 se llaman ***logaritmos decimales*** *y en este caso se suele escribir el logaritmo sin la base.*

2.- Relación entre potencia, raíz y logaritmo

Dada la expresión

$$a^n = b \Rightarrow \begin{cases} \text{a es la base} \\ \text{n es el exponente} \\ \text{b es el resultado de la potencia} \end{cases}$$

a) Potencia: conocidos a y n, calcular b: $a^n = b$

b) Raíz: conocidos b y n, calcular a: $\sqrt[n]{b} = a$

c) Logaritmo: conocidos a y b, calcular n: $\log_a b = n$

- *Ejemplo:*

$$5^3 = 125 \leftrightarrow \sqrt[3]{125} = 5 \leftrightarrow \log_5 125 = 5$$

3.- Cálculo de logaritmos

Para calcular el logaritmo en base a de un número N pasamos a la forma de potencia.

- *Ejemplo*: $\text{Log}_2 16$: $\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$. Luego $\log_2 16 = 4$

Cuando el número N es grande es conveniente expresarlo, si es posible, como potencia de base a. Igualando los exponentes, determinamos el valor del logaritmo.

- *Ejemplos:*

  a) $\text{Log}_2 128$: $\log_2 64 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$. Luego $\log_2 128 = 6$

  b) $\text{Log}_5 625$: $\log_5 625 = x \Leftrightarrow 5^x = 625 \Leftrightarrow 5^x = 5^4 \Leftrightarrow x = 4$. Luego $\log_5 625 = 4$

4.- Casos particulares

a) *El logaritmo de 1 es 0 en cualquier base :* $\log_a 1 = 0$ *porque* $a^0 = 1$

b) *El logaritmo de la base es 1:* $\log_a a = 1$ *porque* $a^1 = a$

c) *Sólo tienen logaritmo los números positivos*

d) $\text{Log}_a a^n = n$

5.- Propiedades de los logaritmos

5.1. Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

- *Ejemplo:* $\log (20) = \log 10 + \log 2 = 1 + \log 2$

5.2. Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

- *Ejemplo:* $\log \left(\frac{6}{5}\right) = \log 6 - \log 5$

5.3. Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

- *Ejemplo:* $\log 3^2 = 2 \cdot \log 3$

5.4. Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

- *Ejemplos:* $\log \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3} \cdot \log 4$

$$\text{Log} \sqrt[3]{4^2} = \frac{2}{3} \cdot \log 4$$

APLICACIONES

1.- Una persona deposita en un banco 6000 € a interés compuesto del 6% anual. Esto significa:

a) ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 4 años?

b) Escribe la función que da el dinero que tendrá al cabo de x años.

a) 1º año: $6000 + 6\%$ de $6000 = 116\%$ de $6000 = 1{,}16 \cdot 6000 = 6960$

2º año: $6960 + 6\%$ de $6960 = 116\ \%$ de $6960 = 1{,}16 \cdot 6960 = 1{,}16^2 \cdot 6000$

Siguiendo el mismo razonamiento llegamos a que:

3º año: $1{,}16^3 \cdot 6000$

4º año: $1{,}16^4 \cdot 6000$

b) $y = 1{,}16^x \cdot 6000$

2.- Oscar se ha comprado un coche que le ha costado 2.500€ y sabe que ese modelo se deprecia a un ritmo de un 15% anual.

a) Calcula el precio de ese coche dentro de 3 años.

b) Halla la fórmula que proporciona el precio del coche en función de los años transcurridos.

a) 1º año: $2500 – 15\%$ de $2500 = 85\%$ de $2500 = 0{,}85 \cdot 2500 = 2125$

2º año: $2125 – 15\%$ de $2125 = 85\%$ de $2125 = 0{,}85 \cdot 2125 = 0{,}85^2 \cdot 2500$

3º año: $0{,}85^3 \cdot 2500$

b) $y = 0{,}85^x \cdot 2500$

3.- .Sabes que la inflación es la pérdida del valor adquisitivo del dinero. Con una inflación del 8% anual, lo que el año pasado costaba 100€ hoy costará 108€ (es decir, 100 + 8% 100). Si la inflación se mantiene en un 8% anual, ¿cuánto costará dentro de 6 años un piso que hoy cuesta 90.000€?

La función que relaciona el número de años con el coste es:

$$y = 1{,}08^x \cdot 90.000$$

Luego dentro de seis años, costará:

$$y = 1{,}08^6 \cdot 90.000 = 142.818{,}67\ €$$

4.- En un bosque, en la etapa de crecimiento, se mide el volumen de madera (biomasa) y se obtiene 10.250 m^3. Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2,5% al año.

a) ¿Qué cantidad de madera habrá dentro de 5 años?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera si sigue creciendo al mismo ritmo?

a) Al año será $10.250 + 2{,}5\%$ de $10.250 = 112{,}5\%$ de $10.250 = 1{,}125 \cdot 10.250 = 11.531{,}25\ m^3$

El crecimiento vendrá dado por la función: $y = 1{,}125^x \cdot 10.250$

Al cabo de cinco años será: $y = 1{,}125^5 \cdot 10250 = 18.470{,}83\ m^3$

b) Para que la producción se duplique: $20.500 = 1{,}125^x \cdot 10.250 \rightarrow\ 2 = 1{,}125^x$

$2 = 1{,}125^x \rightarrow\ \log 2 = \log (1{,}125^x) \rightarrow \log 2 = x \cdot \log (1{,}125) \rightarrow x = 5{,}88$

Aproximadamente deben pasar 6 años.