1.- **(1 punto)** Calcula: a) $\left(5x^3 - \frac{y}{5}\right)^2$ b) $\left(\sqrt{x}+3y\right)\cdot\left(\sqrt{x}-3y\right)$

Solución:

$$a)\left(5x^3 - \frac{y}{5}\right)^2 = 25x^6 + \frac{y^2}{25} - 2x^3y \qquad b)\left(\sqrt{x}+3y\right)\cdot\left(\sqrt{x}-3y\right) = x - 9y^2$$

2.- **(1 punto)** Calcula el cociente y el resto de la división $\left(2x^4 + x^2 - 3x + 2\right) : \left(x^2 + x - 1\right)$

Solución:

Cociente $C(x) = 2x^2 - 2x + 5$

Resto $R(x) = -10x + 7$

3.- **(1'5 puntos)** Calcula m de manera que el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 10x - 8m$ sea divisible entre $x + 2$

¿Cuáles son sus otros factores?

Solución:

	1	m	-10	-8m
-2		-2	-2m+4	4m+12
	1	m-2	-2m-6	-4m+12

Para que sea divisible $-4m + 12 = 0 \Rightarrow m = 3$

El polinomio sería entonces: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

Al hacer Ruffini salen como factores: $(x+2)(x-3)(x+4)$

4.- **(1 punto)** Aplica el Teorema del Resto para razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Al dividir el polinomio $P(x) = x^3 - (m+1)x^2 - 3mx + 2$ entre $x+2$ el resto es $2m-10$

b) Los restos de dividir el polinomio $P(x) = x^5 - 6x^3 + 7x^2 - 13$ entre $x+1$ y $x-2$ son iguales

Solución:

a) $P(-2) = -8 - 4(m+1) + 6m + 2 = -8 - 4m - 4 + 6m + 2 = 2m - 10$, luego es verdadera

b) $P(-1) = -1 + 6 + 7 - 13 = -1$

$P(2) = 32 - 48 + 28 - 13 = -1$

Luego también es verdadera

5.- **(1'5 puntos)** Calcula las raíces y el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios:

$P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 \quad , \quad Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$

Solución:

Al descomponer los polinomios por Ruffini se obtiene:

$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = (x+2)^2(2x-1)$$
$$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x = x(x+2)(2x-1)$$

Las raíces de P son $-2, \frac{1}{2}$

Las raíces de Q son $0, -2, \frac{1}{2}$

El máximo común divisor es: $(x+2)(x-1)$

El mínimo común múltiplo es: $x(x+2)^2(x-1)$

6.- **(2 puntos)** Opera y simplifica: $\left(\frac{x-1}{x+3} + \frac{x^2-1}{x^2+3x} - \frac{x+2}{x}\right) \cdot \left(2 - \frac{x-17}{x-7}\right)$

Solución:

El primer paréntesis:

$$\frac{x-1}{x+3} + \frac{x^2-1}{x^2+3x} - \frac{x+2}{x} = \frac{x(x-1) + x^2 - 1 - (x+3)(x+2)}{x(x+3)} =$$
$$= \frac{x^2 - x + x^2 - 1 - x^2 - 3x - 2x - 6}{x(x+3)} = \frac{x^2 - 6x - 7}{x(x+3)} = \frac{(x+1)(x-7)}{x(x+3)}$$

El segundo:

$$2 - \frac{x-17}{x-7} = \frac{2x - 14 - x + 17}{x-7} = \frac{x+3}{x-7}$$

Luego el producto será: $\frac{(x+1)(x-7)}{x(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x-7} = \frac{x+1}{x}$

7.- **(2 puntos)** Opera y simplifica: $\left[\frac{3x}{x-1}-\frac{3-9x}{x^2-4x+3}\right]:\frac{x+1}{x^2-9}$

Solución:
El corchete:

$$\frac{3x}{x-1}-\frac{3-9x}{x^2-4x+3}=\frac{3x(x-3)-3+9x}{(x-1)(x-3)}=\frac{3x^2-9x-3+9x}{(x-1)(x-3)}=\frac{3x^2-3}{(x-1)(x-3)}=$$
$$=\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(x+1)}{x-3}$$

Y al hacer la división y descomponer:

$$\frac{3(x+1)}{x-3}:\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{3(x+1)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)}=3(x+3)$$