FUNCIONES Y GRÁFICAS

Concepto de función

Una función entre dos conjuntos X e Y es una relación definida de tal manera que a cada elemento X le corresponde exactamente otro elemento (uno y sólo uno) de Y.
Cuando X e Y son el conjunto de los reales, **R**, la función se llama de variable real.
En una función intervienen dos variables, una independiente y otra dependiente. La independiente suele designarse por x; suele llamarse y. Si el par (x, y) pertenece a la función f, se dice que $y = f(x)$. Esquemáticamente se indican así: f: **R** → **R**, esto es: $x \to\ y = f(x)$

Dominio de f, Dom(f). Es el conjunto de los x para los cuales existe el valor de $f(x)$.
La imagen o recorrido de una función f, Im(f), es el conjunto de valores que toma $f(x)$ cuando x pertenece al dominio; es, por tanto, el conjunto de resultados.

- Las funciones reales suelen darse mediante una fórmula o expresión algebraica. Por ejemplo: $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = \sqrt{3-x}$. También se escribe: $y = x^2 - 3x$; $y = \sqrt{3-x}$

Funciones definidas a trozos: $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x < a \\ f_2(x), & \text{si } x \geq a \end{cases}$. Se indica así que la función que actúa para los valores de $x < a$ es $f_1(x)$, y para los valores de $x \geq a$ es $f_2(x)$.

Idea gráfica de una función. Las funciones de variable real suelen representarse por una línea. Todos los puntos de esa línea corresponden a pares de números relacionados entre sí por la función; para cada punto (x_0, y_0) de la gráfica, y_0 es la imagen de x_0; esto es, $y_0 = f(x_0)$.
Si una función viene dada por la expresión $y = f(x)$, para determinar la imagen de un número x_i basta con hallar el valor de $f(x_i)$. Los sucesivos puntos $(x_i, f(x_i))$ generan la gráfica de f.

Consideraciones sobre la gráfica de una función

Al representar o interpretar la una función, aparte de considerar las variables que se relacionan y las escalas de los ejes, conviene señalar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus valores máximos y mínimos, la continuidad, y las posibles simetrías y periodicidades.
Estos conceptos pueden definirse así:

- $f(x)$ es creciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$
- $f(x)$ es decreciente en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$
- $f(x)$ tiene un máximo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \leq f(a) \geq f(a+h)$
- $f(x)$ tiene un mínimo en un punto $x = a \Leftrightarrow f(a-h) \geq f(a) \leq f(a+h)$
- Continuidad. Una función es continua cuando a una variación pequeña de x le corresponde una variación pequeña de $f(x)$: una función f es continua cuando puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.
- Funciones pares: son simétricas respecto del eje OY; cumplen que $f(-x) = f(x)$.
- Funciones impares: simétricas respecto del origen; cumplen: $f(-x) = -f(x)$
- Funciones periódicas: una función de periodo k cumple que $f(x+k) = f(x)$, para todo x.
- Tasa de variación media: $TVM[a,b] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Esta expresión da el aumento o disminución medio (unitario) de la función $f(x)$ cuando la x para de valer a a valer b.
- Tendencias: asíntotas. Las asíntotas de una función son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de esa función. Pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.

Composición de funciones

Cuando sobre $f(x)$ actúa otra función g se puede hablar de composición de funciones. Es frecuente la notación $(g \circ f)(x)$, cuyo significado es $g(f(x))$; se lee *f* compuesta con *g*. Esquemáticamente es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

Análogamente, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

La composición de funciones no es conmutativa; esto, en general $g(f(x)) \neq f(g(x))$

Funciones inversas

Dos funciones *f* y *g* son inversas cuando se cumple que: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$.

La función inversa de *f* se designa por f^{-1}. (También se dice que *f* y *g* son recíprocas.)

Imagen inversa de un número

Para todo y_0 del recorrido de la función *f*, su imagen inversa, $f^{-1}(y_0)$, es el conjunto de los números *x*, del dominio, que se transforman en y_0. Esto es, $f^{-1}(y_0) = \{x \in \mathrm{R} \mid f(x) = y_0\}$.

- Para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x) = y_0$.
- En particular, $f^{-1}(0)$ da los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

Gráficamente, para determinar $f^{-1}(y_0)$ se traza la recta horizontal $y = y_0$; las abscisas correspondientes a los puntos de corte de esa recta con la gráfica de $f(x)$ forman la imagen inversa de y_0.

Transformaciones de una función

A partir de la función $f(x)$ pueden deducirse el comportamiento de:

$$-f(x), \qquad |f(x)|; \qquad k + f(x); \qquad k \cdot f(x); \qquad f(x+k); \qquad f(k \cdot x)$$

k es un número real.

- La función $-f(x)$ cambia de signo todos los resultados de $f(x)$.

Las gráficas de $f(x)$ y de $-f(x)$ son simétricas respecto del eje *OX*.

- La función $|f(x)|$ cambia de signo todos los resultados negativos de $f(x)$; los resultados positivos los deja iguales. Su gráfica no puede aparecer por debajo del eje *OX*.

También puede definirse a trozos. Así: $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$

- La función $k + f(x)$ suma el número *k* a los resultados de $f(x)$. Esto significa que si *k* es positivo, la gráfica de $f(x)$ se desplaza *k* unidades hacia arriba; si *k* es negativo, se desplaza hacia abajo.
- La función $k \cdot f(x)$ multiplica por *k* todos los resultados de $f(x)$.
- La función $f(x+k)$ es la misma que $f(x)$ pero trasladada *k* unidades a la izquierda si *k* es positivo, y *k* unidades a la derecha, si *k* es negativo.
- La función $f(k \cdot x)$ contrae o dilata la función $f(x)$; si k > 1, se contrae; si $0 < k < 1$, se dilata.