Problema 1 Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{3x^3 + 4x^2 - x}{x^2}\, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2 + 1}\, dx$
3. $\displaystyle\int 8x^2 e^{x^3+5}\, dx$
4. $\displaystyle\int 5x(2x^2 - 3)^{10}\, dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{3x^3 + 4x^2 - x}{x^2}\, dx = \frac{3x^2}{2} + 4x - \ln|x| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2 + 1}\, dx = \frac{5}{2}\ln|x^2 + 1| + C$
3. $\displaystyle\int 8x^2 e^{x^3+5}\, dx = \frac{8}{3}e^{x^3+5} + C$
4. $\displaystyle\int 5x(2x^2 - 3)^{10}\, dx = \frac{5(2x^2 - 3)^{11}}{44} + C$

Problema 2 Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^2 + 8x - 12$ y $g(x) = x^2 + 2x + 8$.
Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 3x^2 + 8x - 12 = x^2 + 2x + 8 \Longrightarrow x = -5,\ \ x = 2$$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2x^2 + 6x - 20)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 20x$$

$$S_1 = \int_{-5}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = F(2) - f(-5) = -\frac{343}{3} \Longrightarrow S = \frac{343}{3}\ u^2$$

Problema 3 Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.
Solución:

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = -5,\ \ x = 2$$

Luego tenemos dos áreas. S_1 en $[0,2]$ y S_2 en $[2,3]$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int (x^3+3x^2-10x)\,dx=\frac{x^4}{4}+x^3-5x^2$$

$$S_1=\int_0^2 f(x)\,dx=F(2)-f(0)=-8 \quad S_2=\int_2^3 f(x)\,dx=F(3)-f(2)=\frac{41}{4}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=|-8|+\left|\frac{41}{4}\right|=\frac{73}{4}\ u^2$$

Problema 4 Calcular la primera derivada de las siguientes funciones:

1. $y=\ln\left(\dfrac{3x^2-8}{x+5}\right)$
2. $y=e^{x^2-1}(x^2+7)$
3. $y=\dfrac{e^x}{x^3-3}$
4. $y=e^{x+1}(x^2+2)$

Solución:

1. $y=y=\ln\left(\dfrac{3x^2-8}{x+5}\right)=\ln(3x^2-8)-\ln(x+5)\Longrightarrow$

$$y'=\frac{6x}{3x^2-8}-\frac{1}{x+5}$$

2. $y=e^{x^2-1}(x^2+7)\Longrightarrow y'=2xe^{x^2-1}(x^2+7)+e^{x^2-1}2x$
3. $y=\dfrac{e^x}{x^3-3}\Longrightarrow y'=\dfrac{e^x(x^3-3)-3x^2e^x}{(x^3-3)^2}$
4. $y=e^{x+1}(x^2+2)\Longrightarrow y'=e^{x+1}(x^2+2)+2xe^{x+1}$

Problema 5 Calcular los siguientes límites

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2-1}\right)^{2x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{9x+2}}{x-5}$

Solución:

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2-1}\right)^{2x}=e^{-2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{9x+2}}{x-5}=\frac{11\sqrt{47}}{94}$