Problema 1 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$
2. $f(x) = (x^2+x+7)(3x^2+1)$

Solución:

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}$
2. $f(x) = (x^2+x+7)(3x^2+1) \Longrightarrow f'(x) = 12x^3+9x^2+44x+1$

Problema 2 Dada la función $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 48x + 1$, calcular sus máximos y sus mínimos utilizando el criterio de la segunda derivada.
Solución:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x - 48 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 8$$

$$f''(x) = 12x - 42 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcrcrrl} f''(8) & = & 54 > 0 & \Longrightarrow & x = & 8 & \text{Mínimo} \\ f''(-1) & = & -54 < 0 & \Longrightarrow & x = & -1 & \text{Máximo} \end{array} \right.$$

Luego la función tiene un Mínimo en el punto $(-1, 26)$ y tiene un Máximo en el punto $(8, -703)$.

Problema 3 Resolver

1. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2 - 5 & \text{si} & x < 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right. \quad \text{en } x = 2$$

2. Calcular k de manera que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} kx^2 - kx + 1 & \text{si} & x < 2 \\ 3kx - 2 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

sea continua en todo R.

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(x^2 - 2x + 3) = 3$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(2x^2 - 5) = 3$$

$$f(2) = 3$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 3$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 2$, es más, es continua en todo R.

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(kx^2 - kx + 1) = 2k + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(3kx - 2) = 6k - 2$$

$$2k + 1 = 6k - 2 \Longrightarrow k = \frac{3}{4}$$

Problema 4 Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3} = 1$$

Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía.
6. Máximos y Mínimos.
7. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom} f = R - \{-2\}$

2. Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1/2)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0)$.

3. $$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{(-x+2)}$$

   La función ni es par ni impar.

4. - **Verticales:** $x = -2$

     $$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

   - **Horizontales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

     $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x} = 1$$

     $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x+2} - x\right) = -4$$

     $$y = x - 4$$

5. $$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} = 0$$

   $$x^2 + 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 1, \; x = -5$$

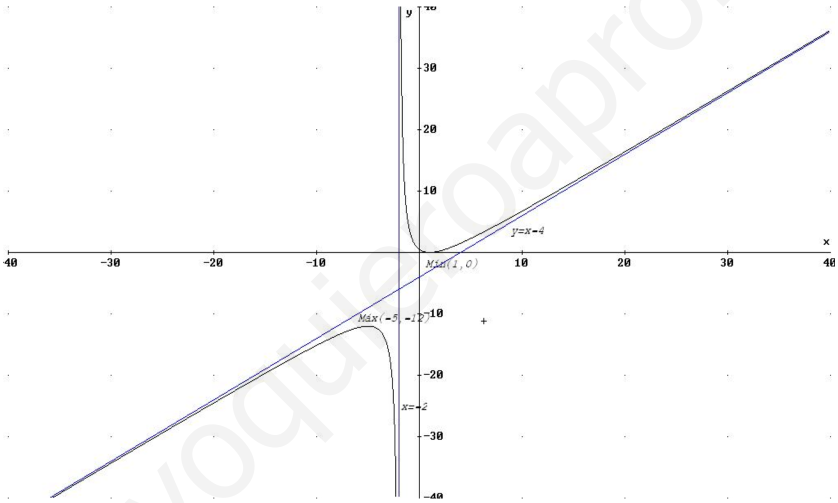
	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, \infty)$
$x + 5$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

   La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

   La función es decreciente en el intervalo $(-5, 1)$.

6. En $x = -5$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo, que corresponde al punto $(-5, -12)$.

   En $x = 1$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo, que corresponde al punto $(1, 0)$.


y
x
y=x-4
Min(1,0)
Máx(-5,-12)
x=-2
-40
-30
-20
-10
10
20
30
40