Problema 1 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

2. $f(x) = (x^2 - x + 1)(2x^2 - 1)$

Solución:

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

2. $f(x) = (x^2 - x + 1)(2x^2 - 1) \Longrightarrow f'(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2x + 1$

Problema 2 Dada la función $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 12$, calcular sus máximos y sus mínimos utilizando el criterio de la segunda derivada.
Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -5$$

$$f''(x) = 6x + 12 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcrcrrl} f''(1) & = & 18 > 0 & \Longrightarrow & x = & 1 & \text{Mínimo} \\ f''(-5) & = & -18 < 0 & \Longrightarrow & x = & -5 & \text{Máximo} \end{array} \right.$$

Luego la función tiene un Mínimo en el punto $(1, 4)$ y tiene un Máximo en el punto $(-5, 112)$.

Problema 3 Resolver

1. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^3 - 7 & \text{si} & x < 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right. \quad \text{en } x = 2$$

2. Calcular k de manera que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} kx^2 - k & \text{si} & x < 1 \\ kx - 2 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

sea continua en todo R.

Solución:

1.

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (x^3 - 7) = 1$$

$$f(2) = 1$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = f(2) = 1$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 2$, es más, es continua en todo R.

2.

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (kx^2 - k) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (kx - 2) = k - 2$$

$$k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 2$$

Problema 4 Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^3 + 3x^2 + 9x + 7}$$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^3 + 3x^2 + 9x + 7} = \frac{1}{3}$$

Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \frac{(x + 1)^2}{x - 2}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía.
6. Máximos y Mínimos.
7. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Dom$f = R - \{2\}$

2. Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/2)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$.

3. $$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{(-x-2)}$$

   La función ni es par ni impar.

4. - **Verticales:** $x = 2$

     $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

   - **Horizontales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

     $$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x} = 1$$

     $$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x-2} - x\right) = 4$$

     $$y = x + 4$$

5. $$f'(x) = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} = 0$$

   $$x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -1, \; x = 5$$

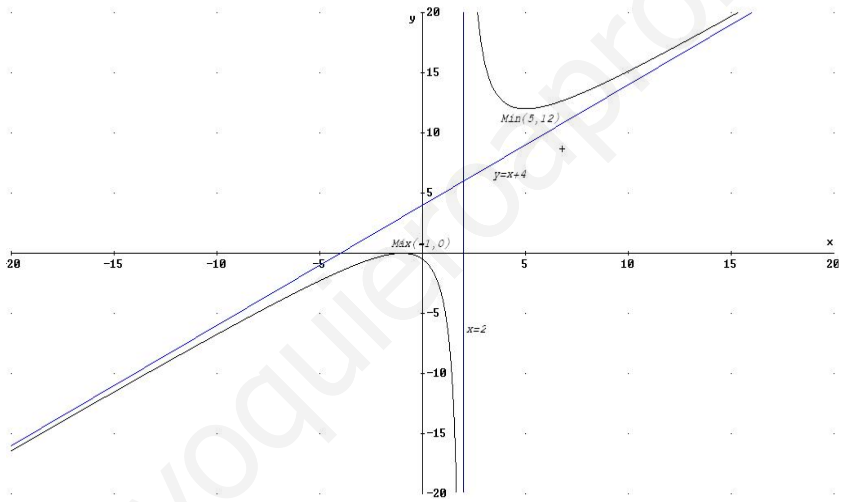
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

   La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

   La función es decreciente en el intervalo $(-1, 5)$.

6. En $x = -1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo, que corresponde al punto $(-1, 0)$.

   En $x = 5$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo, que corresponde al punto $(5, 12)$.


y
x
Min(5,12)
y=x+4
Máx(-1,0)
x=2
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20