Problema 1 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^{x^2-2x-1}$
2. $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + 2)$

Solución:

1. $f(x) = e^{x^2-2x-1} \Longrightarrow f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x-1}$
2. $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + 2) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

Problema 2 Dada la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, calcular sus máximos y sus mínimos utilizando el criterio de la segunda derivada.
Solución:

$$f'(x) = 12x^2 - 12x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 1$$

$$f''(x) = 24x - 12 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} f''(0) = & -12 < 0 \Longrightarrow \ x = 0 \text{ Máximo} \\ f''(1) = & 12 > 0 \Longrightarrow \ x = 1 \text{ Mínimo} \end{array} \right.$$

Luego la función tiene un Mínimo en el punto $(1, -1)$ y tiene un Máximo en el punto $(0, 1)$.

Problema 3 Resolver

1. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 - 2 & \text{si} & x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right. \quad \text{en } x = 1$$

2. Calcular k de manera que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} kx^2 - 1 & \text{si} & x < 2 \\ 2x + k & \text{si} & x \ge 2 \end{array} \right.$$

sea continua en todo R.

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(x^2 - x - 1) = -1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(x^2 - 2) = -1$$

$$f(1) = -1$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -1$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$, es más, es continua en todo R.

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(2x + k) = 4 + k$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(kx^2 - 1) = 4k - 1$$

$$4 + k = 4k - 1 \Longrightarrow k = \frac{5}{3}$$

Problema 4 Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - 3x + 2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - 3x + 2} = 1$$

Problema 5 Dada la función

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-3}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonía.
6. Máximos y Mínimos.
7. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom} f = R - \{3\}$

2. Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/3)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0)$.

3. $$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{(-x-3)}$$

   La función ni es par ni impar.

4.
   - **Verticales:** $x = 3$

     $$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{(x-1)^2}{x-3} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{(x-1)^2}{x-3} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

   - **Horizontales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x-1)^2}{x-3} = \infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

     $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x} = 1$$

     $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x-3} - x\right) = 1$$

     $$y = x + 1$$

5. $$f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} = 0$$

   $$x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ x = 5$$

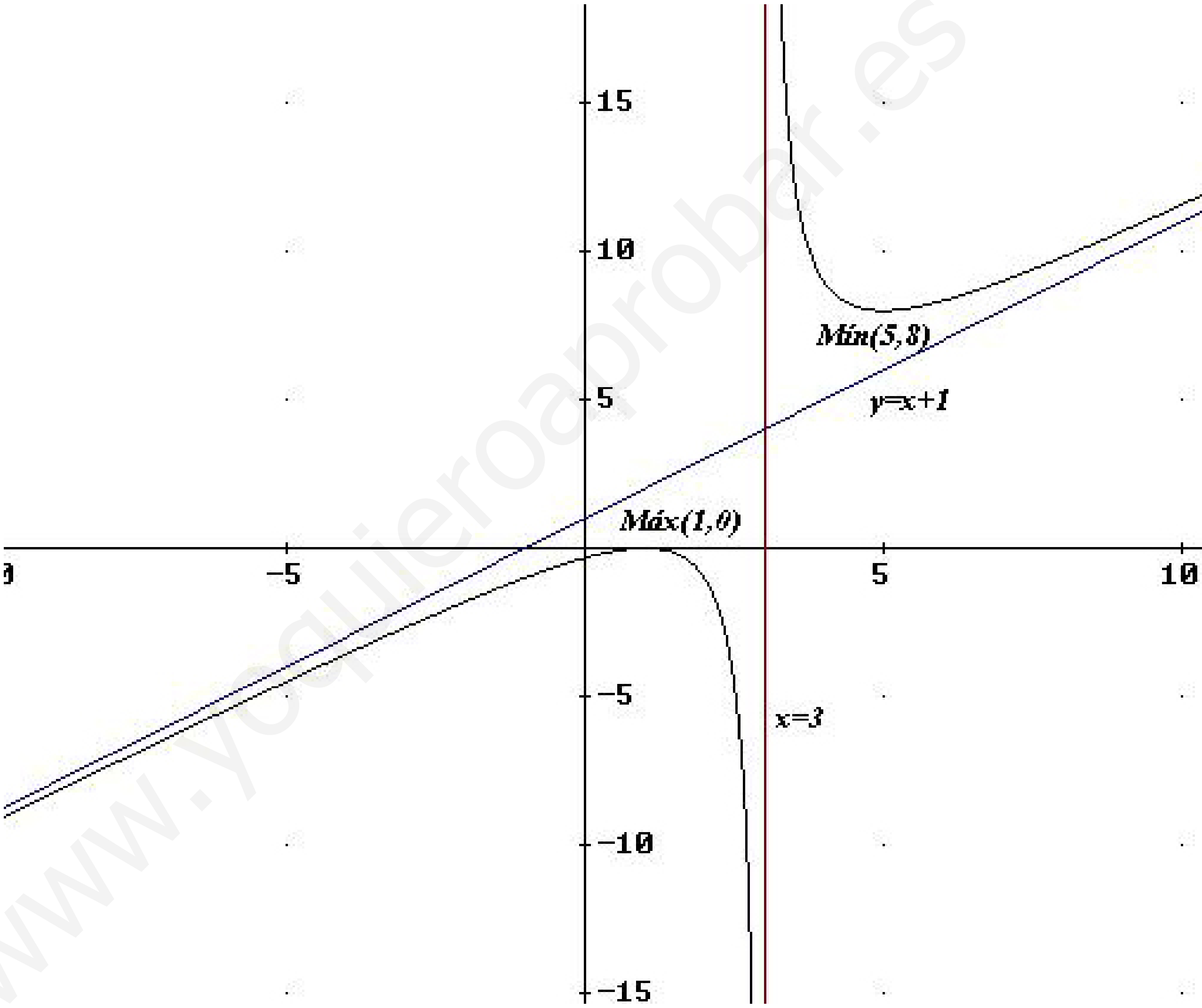
	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

   La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$.

   La función es decreciente en el intervalo $(1, 5)$.

6. En $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo, que corresponde al punto $(1, 0)$.

   En $x = 5$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo, que corresponde al punto $(5, 8)$.


15
10
5
-5
-10
-15
-5
5
10
Mín(5,8)
y=x+1
Máx(1,0)
x=3