Problema 1 Calcular el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x + 1}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{\sqrt{x - 1}}$

Solución:

1. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x + 1} \Longrightarrow \; Dom\, f = (-\infty, -1) \cup [3, \infty)$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{\sqrt{x - 1}} \Longrightarrow \; Dom\, f = (1, \infty)$

Problema 2 Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, calcular: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.
Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 + 5}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x + 3}\right) = \sqrt{\frac{1}{(x + 3)^2} + 5}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x + 3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+3} + 3} = \frac{x + 3}{3x + 10}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x^2 + 5}) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + 5}\right)^2 + 5} = \sqrt{x^2 + 10}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$, calcular la función inversa.
Solución:

$$y = \frac{2x + 3}{x + 1} \Longrightarrow yx + y = 2x + 3 \Longrightarrow yx - 2x = 3 - y \Longrightarrow$$

$$(y - 2)x = 3 - y \Longrightarrow x = \frac{3 - y}{y - 2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{x - 2}$$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^5 - x^4 - 3x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x - 2}$

2. $\lim_{x \longrightarrow 5} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 21}}{x - 5}$

Solución:

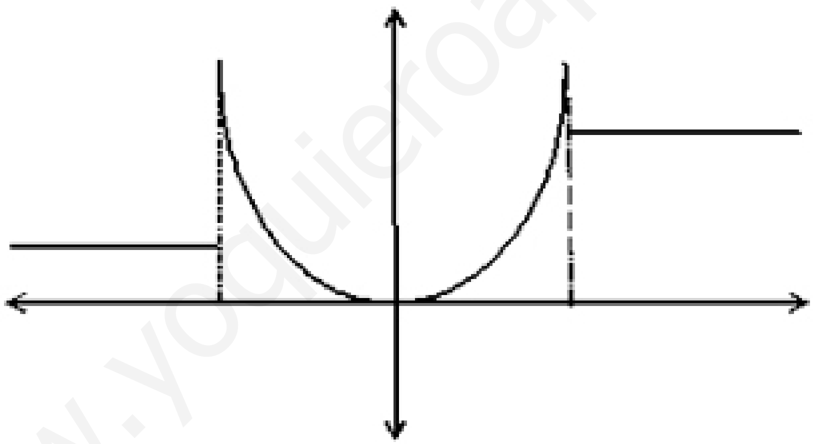
1. $\lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^5 - x^4 - 3x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x - 2} = -1$

2. $\lim_{x \longrightarrow 5} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 21}}{x - 5} = -\dfrac{5}{2}$

Problema 5 Dibujar la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 < x \leq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom} f = R - \{0\}$
2. Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ no hay corte con el eje OY. Y si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (3, 0)$ y $(-3, 0)$
3.
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 9}{(-x)} = -\frac{x^2 - 4}{x}$$

   La función es impar.

4. - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - 9}{x} = \left[\frac{-9}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 - 9}{x} = \left[\frac{-9}{0^-}\right] = \infty$$

   - **Horizontales:**

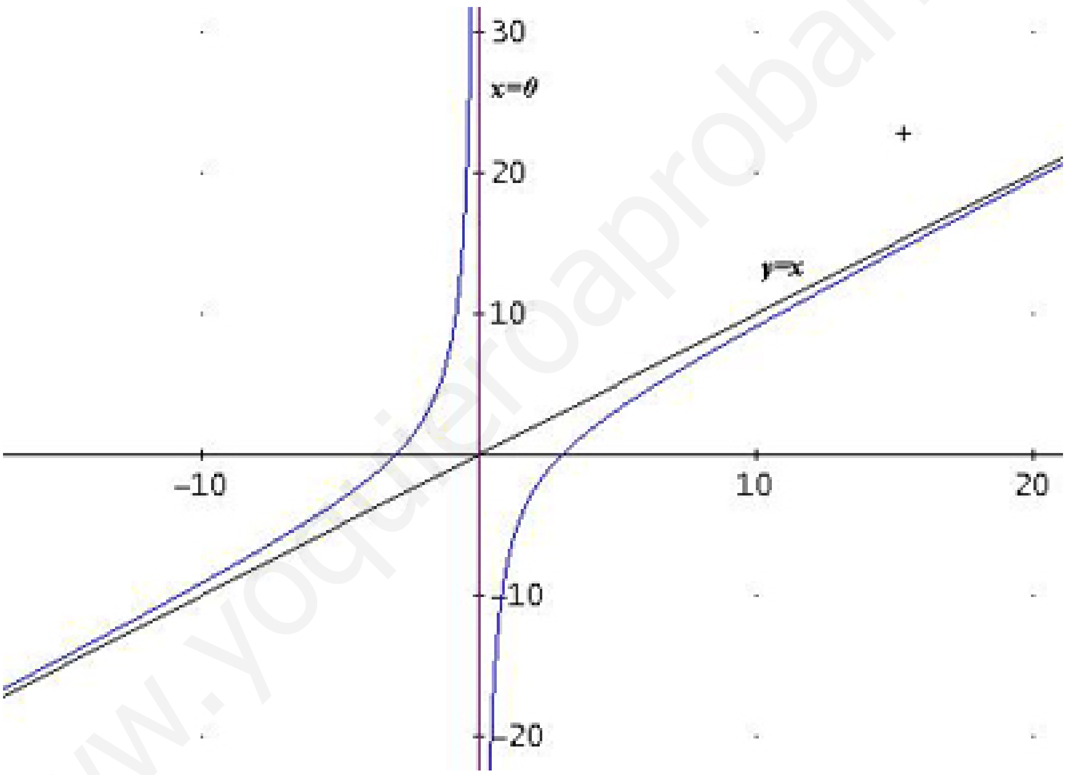
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x} = \infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 9}{x} - x\right) = 0$$

$$y = x$$


30
x=0
20
y=x
10
–10
10
20
-10
-20