Problema 1 Calcular el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2-x-2}}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}}$

Solución:

1. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2-x-2}}{x+2} \Longrightarrow Dom\, f = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [2, \infty)$
2. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}} \Longrightarrow Dom\, f = (-3, \infty)$

Problema 2 Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, calcular: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.
Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+2}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x+2}\right) = \sqrt{\frac{1}{(x+2)^2}+1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+2}+2} = \frac{x+2}{2x+5}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x^2+1}) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+1} = \sqrt{x^2+2}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$, calcular la función inversa.
Solución:

$$y = \frac{x+1}{2x+3} \Longrightarrow 2yx + 3y = x + 1 \Longrightarrow 2yx - x = 1 - 3y \Longrightarrow$$

$$(2y-1)x = 1 - 3y \Longrightarrow x = \frac{1-3y}{2y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2x-1}$$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{x^4+x^3-3x^2-4x-1}{x^3+x^2+2x+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$

Solución:

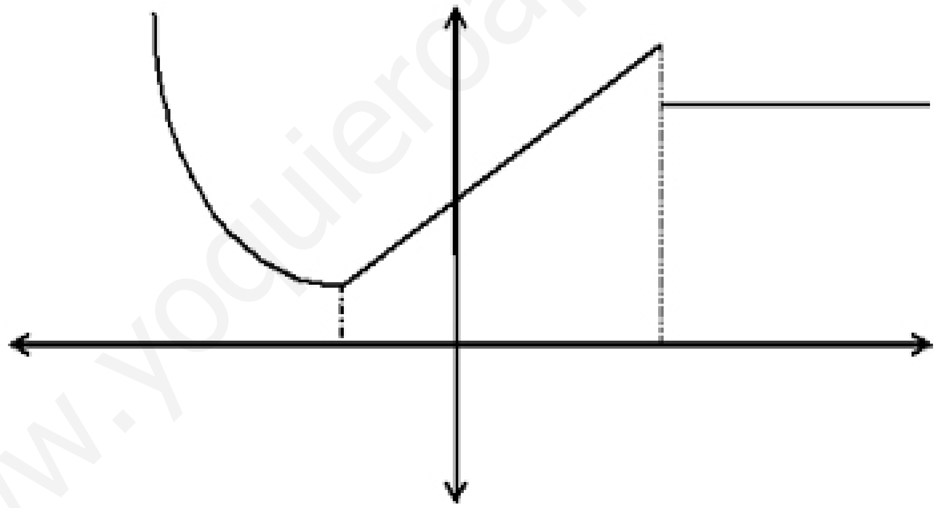
1. $\lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{x^4+x^3-3x^2-4x-1}{x^3+x^2+2x+2} = \dfrac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2} = -\dfrac{2}{3}$

Problema 5 Dibujar la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x+2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:



Problema 6 Dada la función

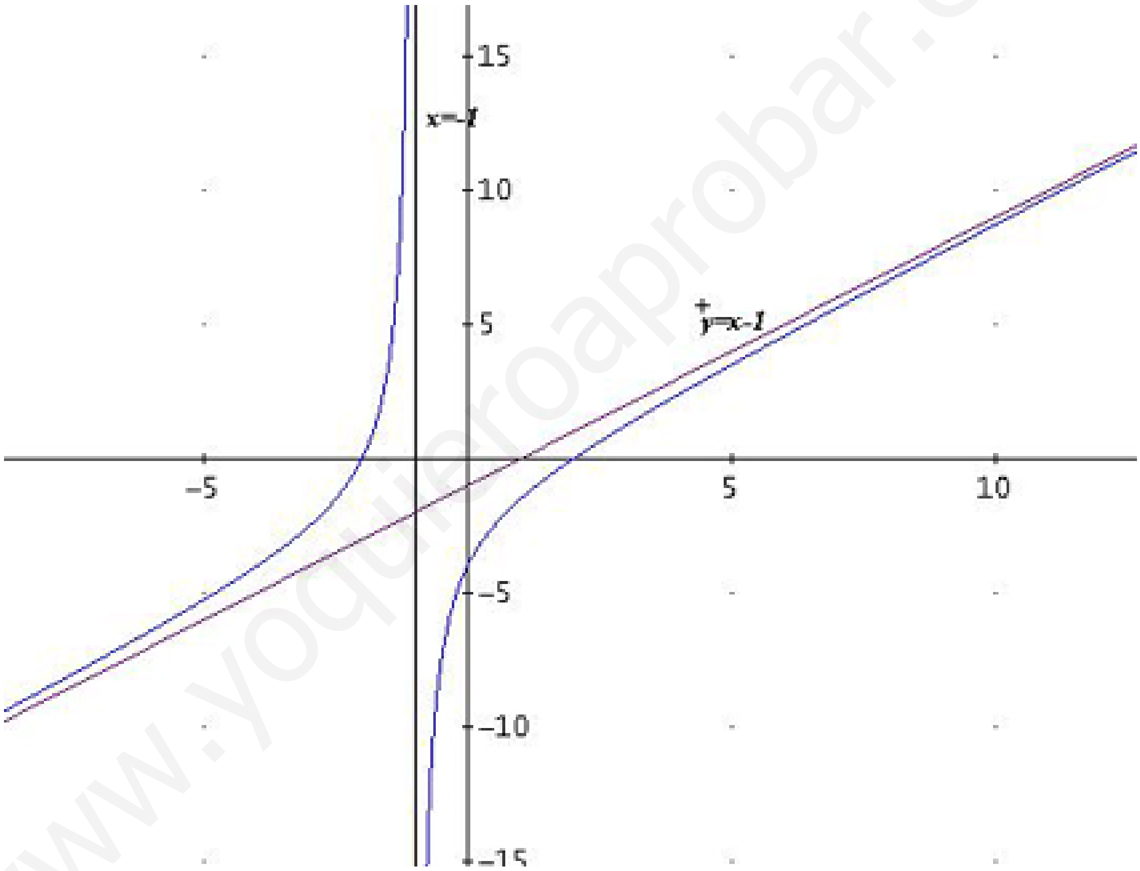
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom}f = R - \{-1\}$
2. Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -4)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (2, 0)$ y $(-2, 0)$
3.
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x) + 1} = \frac{x^2 - 4}{-x + 1}$$
   La función ni es par ni impar.
4.
   - **Verticales:** $x = -1$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = \infty$$
   - **Horizontales:**
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$
   - **Oblicuas:** $y = mx + n$
   $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1$$
   $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x\right) = -1$$
   $$y = x - 1$$



x=-1
y=x-1
15
10
5
−5
−10
−5
5
10