Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Representación gráfica.

h) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 3$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow (2, 0),\ (-2, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 8 \Longrightarrow (0, 8)$.

c)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

d) $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ PAR.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$ ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \pm\infty$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty$$

  $x = -1$ ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \pm\infty$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty$$

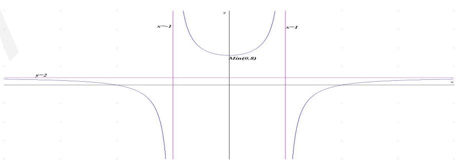
- **Horizontales:** $y = 2$ ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 1} = 2$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es creciente en los intervalos $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, presenta un mínimo en el punto $(0, 8)$

g) Representación:



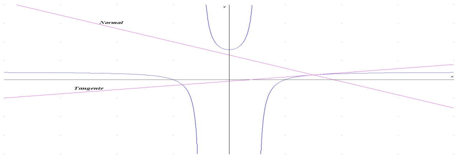
h) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:

Como $f(3) = 5/4$ las rectas pasan por el punto $(3, 5/4)$.

Como $m = f'(3) = \frac{9}{16}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{5}{4} = \frac{9}{16}(x - 3)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{5}{4} = -\frac{16}{9}(x-3)$$



Problema 2 Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{7x^3 - 3x^2 + 6}{x}\, dx = \frac{7x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6\ln|x| + C$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{4x^3 - 3x^2 - 5}{x^3} - 5e^x\right) dx = 4x - 3\ln x + \frac{5x^{-2}}{2} - 5e^x + C$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{6x^3 + \sqrt[5]{x^2} + 3x^2}{x^3} - 9e^x\right) dx = 6x - \frac{5x^{-8/5}}{8} + 3\ln|x| - 9e^x + C$