Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 16}{x - 3}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Estudiar su curvatura y sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{3\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 3x + 16 = 0 \Longrightarrow$ No tiene solución y, por tanto, no hay.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1/3 \Longrightarrow (0, -16/3)$.
3.

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ no hay simetría.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 16}{x - 3} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x + 16}{x - 3} = \left[\frac{16}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x + 16}{x - 3} = \left[\frac{16}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 16}{x - 3} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + m$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 16}{x^2 - 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 16}{x - 3} - x\right) = 0$$

$$y = x$$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{(x - 3)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 7$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 7)$	$(7, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

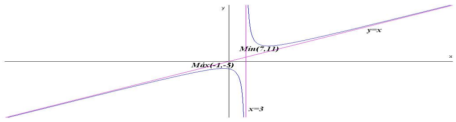
La función es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$
La función es decreciente en: $(-1, 3) \cup (3, 7)$
La función tiene un máximo en: $(-1, -5)$ y un mínimo en $(7, 11)$.

7.

$$f''(x) = \frac{32}{(x - 3)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{ no hay puntos de inflexión}$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

La función f es convexa en el intervalo $(-\infty, 3)$ y cóncava en el intervalo $(3, \infty)$.



8. Representación:

9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$:

   Como $f(0) = -16/3$ las rectas pasan por el punto $(0, -16/3)$.

   Como $m = f'(0) = -5/4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y + \frac{16}{3} = -\frac{7}{9}x$$

$$\text{Recta Normal}: \; y + \frac{16}{3} = \frac{9}{7}x$$