

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x = 0 \implies (0, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	-	+

d) $f(-x) = -f(x) \implies$ la función es IMPAR.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, el denominador no se anula nunca.

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(1, 3/2)$ y un mínimo en el punto $(-1, -3/2)$.

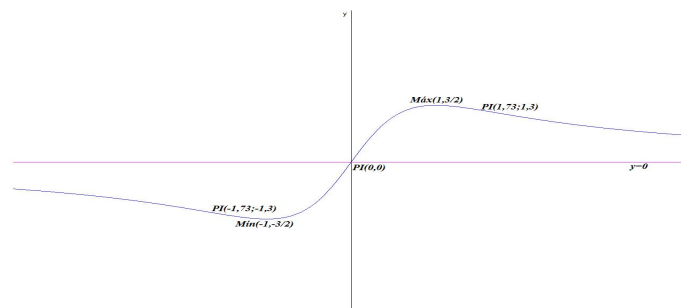
g)

$$f''(x) = \frac{6x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

f es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Y tiene tres puntos de inflexión en los puntos $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ y $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$.

h) Representación:



- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $m = f'(2) = -32/9$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{6}{5} = -\frac{9}{25}(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{6}{5} = \frac{25}{9}(x - 2)$$

Como $f(2) = 6/5$ las rectas pasan por el punto $(2, 6/5)$.

