Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Representación gráfica.

h) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow$ $(3, 0)$ $(-3, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte.

c)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	$+$	$-$	$+$

d) $f(-x) = f(x) \Longrightarrow f$ es par.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 - 9}{x^2} = \left[\frac{-9}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - 9}{x^2} = \left[\frac{-9}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

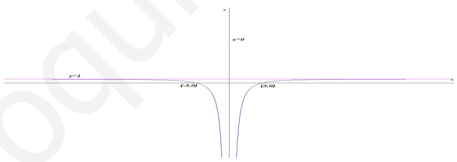
f)

$$f'(x) = \frac{18}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{ no hay extremos}$$

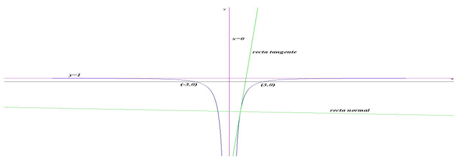
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es creciente en: $(0, +\infty)$
La función es decreciente en: $(-\infty, 0)$

g) Representación:



h) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:



Como $f(1) = -8$ las rectas pasan por el punto $(0, -45/2)$.
Como $m = f'(1) = 18$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y + 8 = 18(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y + 8 = -\frac{1}{18}(x - 1)$$