**Problema 1** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2x & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \\ 3x-2 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ \\ 7x & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y en $x = 3$. Representarla gráficamente

**Solución:**

En $x = 1$ es continua , en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 3$ es discontinua no evitable(salto).

**Problema 2** Calcular $a$ y $b$ para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2bx & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \\ 3ax-5b & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

sea continua en los puntos $x = 1$ y en $x = 2$.

**Solución:**

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2+1) = a+1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (2bx) = 2b$$

$$a+1 = 2b \Longrightarrow a - 2b = -1$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (2bx) = 4b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+}(3ax-5b) = 6a-5b$$

$$4b = 6a-5b \Longrightarrow 6a-9b=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} a-2b=-1 \\ 6a-9b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ b=2 \end{array}\right.$$

**Problema 3** Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$, determina

1. Calcula sus asíntotas

2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

**Solución:**

1. Asíntotas:

   - Verticales: en $x=-3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-}\frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+}\frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{(x-3)^2}{x+3} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{(x-3)^2}{x^2+3x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x\right) = -9$$

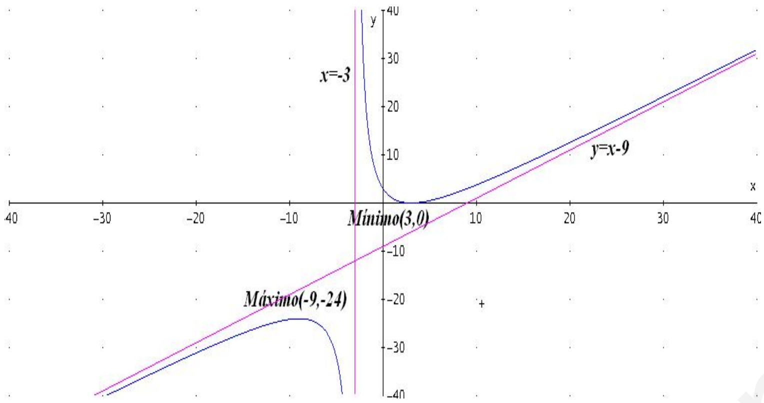
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}, \quad f'(x) = \frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x=3, \;\; x=-9$$

| | $(-\infty,-9)$ | $(-9,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

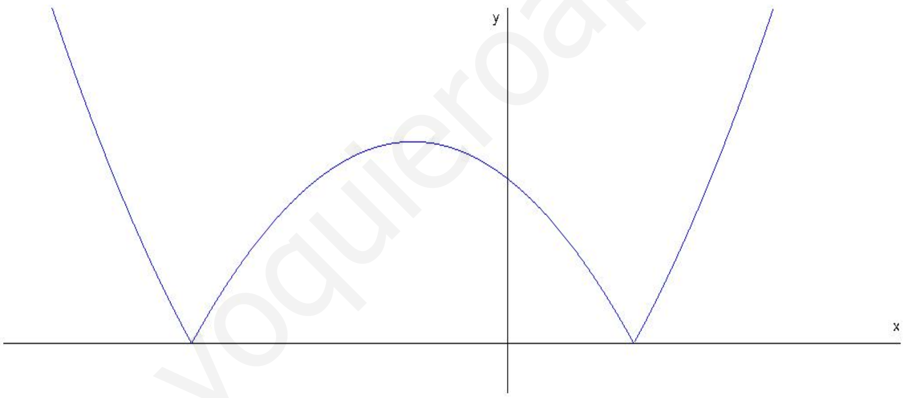
La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-9)\cup(3,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-9,-3)\cup(-3,3)$

La función tiene un máximo en el punto $(-9,-24)$ y un mínimo en el punto $(3,0)$.




**Problema 4** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

**Solución:**
Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$:



| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $-10$ |
| $-5$ | 0 |
| 2 | 0 |
| $-3/2$ | $-49/4$ |

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{si} \quad x \le -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si} \quad -5 < x \le 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^-} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^+} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

Luego $f$ es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

**Problema 5** Calcular los números reales $a$, $b$ y $c$ de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 0)$.

**Solución:**

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Longrightarrow a - 2b + c = 2 \\ f(3) = 0 \Longrightarrow 9a - 6b + c = 0 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 6a - 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 9/2 \end{cases}$$