Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{4x}{(x-2)^2}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Estudiar su curvatura y sus puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 4x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No hay simetría.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{4x}{(x-2)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{4x}{(x-2)^2} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{4x}{(x-2)^2} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x}{(x-2)^2} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

f)

$$f'(x) = -\frac{4(x+2)}{(x-2)^3} = 0 \Longrightarrow x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es decreciente en: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
La función es creciente en: $(-2, 2)$
La función tiene un mínimo en: $(-2, -1/2)$

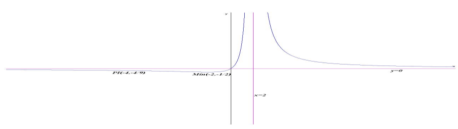
g)

$$f''(x) = \frac{8(x+4)}{(x-2)^4} = 0 \Longrightarrow x = -4$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

La función f es convexa en el intervalo $(-\infty, -4)$ y cóncava en el intervalo $(-4, 2) \cup (2, \infty)$. Tendría un punto de inflexión en $(-4, -4/9)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

Como $f(1) = 4$ las rectas pasan por el punto $(1, 4)$.

Como $m = f'(1) = 12$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - 4 = 12(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal}: \ y - 4 = -\frac{1}{12}(x - 1)$$