Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{\pm 2\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 12 = 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de corte con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1/4 \Longrightarrow (0, -1/4)$.

c)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	$+$	$-$	$+$

d) $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ la función es par.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

f)

$$f'(x) = -\frac{10x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(0, 1/4)$.

g)

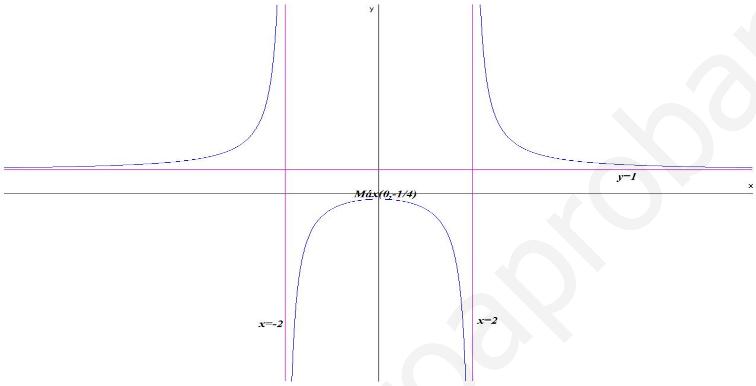
$$f''(x) = \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión.

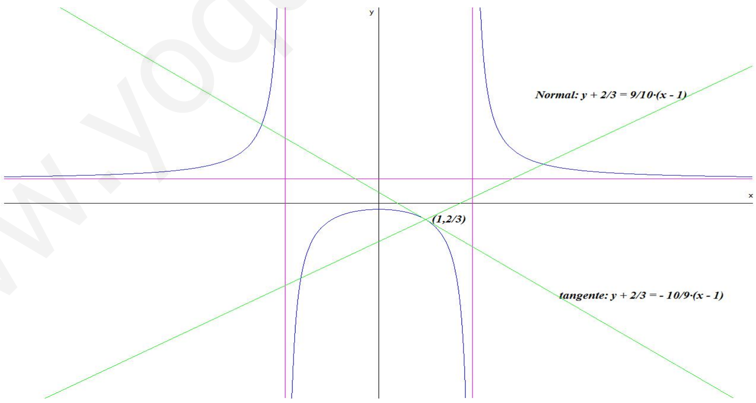
	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$
Convexa: $(-2,2)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x=1$:
Como $m=f'(0)=-10/9$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente}: \; y+\frac{2}{3}=-\frac{10}{9}(x-1)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y+\frac{2}{3}=\frac{9}{10}(x-1)$$

Como $f(1)=-\frac{2}{3}$ las rectas pasan por el punto $(0,-2/3)$.