FICHA BLOQUE I:

NÚMEROS REALES. ALGEBRA. FUNCIONES ELEMENTALES. REPASO DEL BLOQUE II

1. Opera y simplifica al máximo las expresiones:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\dfrac{80}{45}}$

b) $\sqrt{128}+2\sqrt{18}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

Solución:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\dfrac{180}{4}}=\sqrt{\dfrac{5\cdot 180}{4}}=\sqrt{\dfrac{5\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2}}=\sqrt{5^2\cdot 3^2}=5\cdot 3=15$

b) $\sqrt{63}-2\sqrt{28}=\sqrt{3^2\cdot 7}-2\sqrt{2^2\cdot 7}=3\sqrt{7}-4\sqrt{7}=-\sqrt{7}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1}=3-2\sqrt{2}$

2. Descompón en factores el siguiente polinomio:

$$x^4-4x^3-5x^2$$

Solución:

Sacamos factor común:

$x^4-4x^3-5x^2=x^2\left(x^2-4x-5\right)$

Buscamos las raíces de x^2-4x-5 resolviendo la ecuación:

$$x^2-4x-5=0\ \rightarrow\ x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

Por tanto:

$x^4-4x^3-5x^2=x^2(x-5)(x+1)$

3. Calcula:

$$\frac{2x+1}{x-1}+\frac{3x}{x+1}-\frac{5x^2}{x^2-1}$$

Solución:

$$\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x+1}-\frac{2x+2}{x^2+x}=\frac{(x+1)^2}{x^2+x}-\frac{x^2}{x^2+x}-\frac{2x+2}{x^2+x}=\frac{x^2+2x+1-x^2-2x-2}{x^2+x}=\frac{-1}{x^2+x}$$

4. Opera y simplifica:

$$\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}\right)\cdot\frac{(2x-1)^2}{3x}$$

Solución:

$$\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}\right)\cdot\frac{(2x-1)^2}{3x}=\frac{2x-(2x-1)}{(2x-1)\cdot 2x}\cdot\frac{(2x-1)^2}{3x}=\frac{2x-2x+1}{2x(2x-1)}\cdot\frac{(2x-1)^2}{3x}=$$

$$=\frac{1}{2x(2x-1)}\cdot\frac{(2x-1)^2}{3x}=\frac{2x-1}{6x^2}$$

5. Resuelve estas ecuaciones:

a) $x^4-37x^2+36=0$

b) $\frac{2x^2-1}{2}+\frac{x-1}{6}=\frac{x-1}{3}$

Solución:

a) $x^4-37x^2+36=0$

Cambio $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$

$z^2-37z+36=0$

$$z=\frac{37\pm\sqrt{1369-144}}{2}=\frac{37\pm\sqrt{1225}}{2}=\frac{37\pm 35}{2}\rightarrow\begin{cases}z=36\\z=1\end{cases}$$

$z=36 \rightarrow x^2=36 \rightarrow x=\pm\sqrt{36} \rightarrow x=\pm 6$

$z=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{1} \rightarrow x=\pm 1$

Hay cuatro soluciones: $x_1 = -6$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 6$

b) $\frac{2x^2-1}{2}+\frac{x-1}{6}=\frac{x-1}{3}$

$\frac{6x^2-3}{6}+\frac{x-1}{6}=\frac{2x-2}{6}$

$6x^2-3+x-1=2x-2$

$6x^2-x-2=0$

6. Halla las soluciones de las ecuaciones:

a) $\frac{x-2}{6}-\frac{x+1}{3}=\frac{1-x}{2}$

b) $\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6x^2}$

c) $\frac{2\cdot(2x+1)}{2x-1}-\frac{3\cdot(2x-1)}{2x+1}+5=0$

$$\frac{x-2}{6}-\frac{x+1}{3}=\frac{1-x}{2}$$
$$\frac{x-2}{6}-\frac{2x+2}{6}=\frac{3-3x}{6}$$
$$x-2-(2x+2)=3-3x$$
$$x-2-2x-2=3-3x$$
$$-x-4=3-3x$$
$$-x+3x=3+4$$
$$2x=7$$
$$x=\frac{7}{2}$$

$$\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6x^2}$$
$$\frac{30}{24x^2}-\frac{8x^2}{24x^2}=\frac{12}{24x^2}$$
$$30-8x^2=12$$
$$30-12=8x^2$$
$$8=8x^2$$
$$1=x^2$$
$$\pm\sqrt{1}=x$$
$$\pm 1=x$$

$$\frac{2\cdot(2x+1)}{2x-1}-\frac{3\cdot(2x-1)}{2x+1}+5=0$$
$$\frac{2\cdot(2x+1)\cdot(2x-1)}{(2x+1)\cdot(2x-1)}-\frac{3\cdot(2x-1)\cdot(2x+1)}{(2x+1)\cdot(2x-1)}+\frac{+5\cdot(2x-1)\cdot(2x-1)}{(2x+1)\cdot(2x-1)}=0$$
$$2\cdot(2x+1)\cdot(2x-1)-3\cdot(2x-1)\cdot(2x+1)+5\cdot(2x+1)\cdot(2x-1)=0$$

Recordar $(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot(a-b)=a^2-b^2$

$$2\cdot(4x^2-1)-3\cdot(4x^2-1)+5\cdot(4x^2-1)=0$$
$$8x^2-2-12x^2+3+20x^2-5=0$$
$$16x^2-4=0$$
$$16x^2=4$$
$$x^2=\frac{4}{16}\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{16}}=\pm\frac{2}{4}$$

6. Halla la solución de estos sistemas:

a) $$\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{2}+x&=4\\ \frac{2x-y}{2}+x-y&=1\end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned}3xy&=5\\ 2x+\frac{1}{3}(y-1)&=2\end{aligned}\right\}$$

Solución:

a) $$\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{2}+x&=4\\ \frac{2x-y}{2}+x-y&=1\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{2}+\frac{2x}{2}&=\frac{8}{2}\\ \frac{2x-y}{2}+\frac{2x}{2}-\frac{2y}{2}&=\frac{2}{2}\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}x+y+2x&=8\\ 2x-y+2x-2y&=2\end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\begin{aligned}3x+y&=8\\ 4x-3y&=2\end{aligned}\right\}\rightarrow y=8-3x$$

$$4x-3y=2\ \rightarrow\ 4x-3(8-3x)=2\ \rightarrow\ 4x-24+9x=2\ \rightarrow 13x=26\ \rightarrow\ x=2$$

$$y=8-3x=8-6=2$$

La solución es: $x=2$; $y=2$

b) $$\left.\begin{aligned}3xy&=5\\ 2x+\frac{1}{3}(y-1)&=2\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}3xy&=5\\ 6x+y-1&=6\end{aligned}\right\}\rightarrow\left.\begin{aligned}3xy&=5\\ 6x+y&=7\end{aligned}\right\}$$

Despejamos y de la 2.ª ecuación: $y=7-6x$

Sustituimos en la primera:

$$3x(7-6x)=5\ \rightarrow\ 21x-18x^2=5\ \rightarrow\ 18x^2-21x+5=0$$

7. Averigua la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2y+x-2}{4}-x=-3\\ x-(y+1)=3\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{3y}=-2\\ x+2y=1\end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2y+x-2}{4}-x=-3\\ x-(y+1)=3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{2y+x-2}{4}-\dfrac{4x}{4}=\dfrac{-12}{4}\\ x-y-1=3\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l}2y+x-2-4x=-12\\ x-y=4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}-3x+2y=-10\\ x-y=4\end{array}\right\} \rightarrow x=4+y$

$-3(4+y)+2y=-10 \rightarrow -12-3y+2y=-10 \rightarrow -y=2 \rightarrow y=-2$

$x=4+y=4-2=2$

La solución es: $x = 2$; $y = -2$

b) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{3y}=-2\\ x+2y=1\end{array}\right\}$

Despejamos x de la 2.ª ecuación: $x = 1 - 2y$; y sustituimos en la primera:

$\rightarrow \dfrac{5}{1-2y}-\dfrac{2}{3y}=-2 \rightarrow \dfrac{5\cdot 3y}{3y(1-2y)}-\dfrac{2(1-2y)}{3y(1-2y)}=\dfrac{-2\cdot 3y(1-2y)}{3y\cdot(1-2y)} \rightarrow$

$\rightarrow 15y-2+4y=-6y+12y^2 \rightarrow 12y^2-25y+2=0$

$y=\dfrac{25\pm\sqrt{625-96}}{24}=\dfrac{25\pm\sqrt{529}}{24}=\dfrac{25\pm 23}{24}=\begin{cases}\dfrac{48}{24}=2\\ \dfrac{2}{24}=\dfrac{1}{12}\end{cases}$

Calculamos, en cada caso, el valor de x sustituyendo en la ecuación $x = 1 - 2y$:

– Si $y=2 \rightarrow x=1-4=3$

– Si $y=\dfrac{1}{12} \rightarrow x=1-2\cdot\dfrac{1}{12}=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

Las soluciones son:

$x_1=-3;\quad y_1=2$

$x_2=\dfrac{5}{6};\quad y_2=\dfrac{1}{12}$

8. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x - 3y < 0 \\ x > 2 \\ y - 3x > -1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24 \end{array}\right\}$

$x^2 = 55 + y^2$

$xy = 24 \rightarrow$ Elevamos al cuadrado a cada lado de la ecuación

$(\mathrm{xy})^2 = 24^2$

$x^2 \cdot y^2 = 576$ - Y sustituimos el valor de la x^2

$(55 + y^2) \cdot y^2 = 576$

$55y^2 + y^4 = 576$

$y^4 + 55y^2 - 576 = 0$ Ahora hacemos una cambio de variable $\mathrm{y}^2 = h$

$y^2 \cdot y^2 + 55y^2 - 576 = 0$

$h^2 + 55h - 576 = 0$

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-55 \pm \sqrt{55^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-576)}}{2 \cdot 1} = \frac{-55 \pm \sqrt{3025 + 2304}}{2} = \frac{-5 \pm 73}{2} =$$

$$\frac{-55 + 73}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$= \frac{-55 - 73}{2} = \frac{-128}{2} = -64$$

Desacemos el cambio de variable

$\mathrm{y}^2 = h \rightarrow \mathrm{y}^2 = 9 \rightarrow \mathrm{y} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\mathrm{y}^2 = h \rightarrow \mathrm{y}^2 = -64 \rightarrow \mathrm{y} = \pm\sqrt{-64}$ No tiene solución real

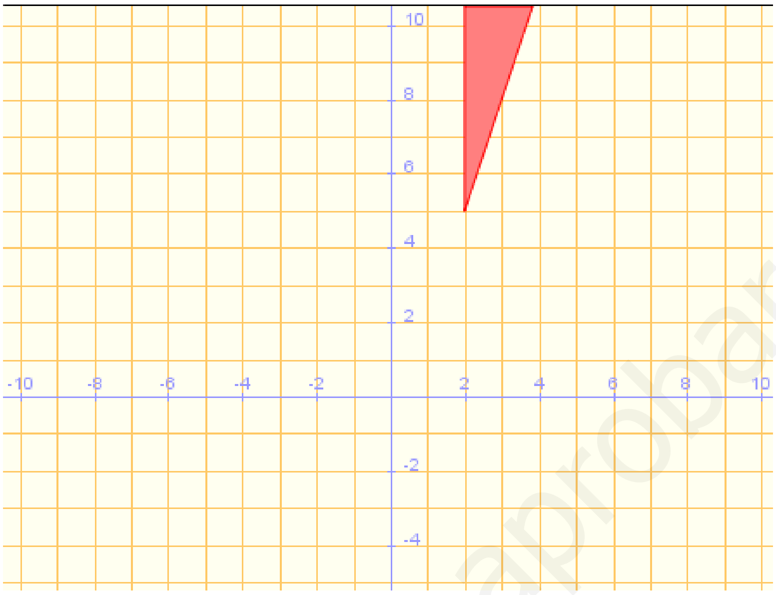
Y calculamos el valor de la x

$\mathrm{y} = +3 \rightarrow x = \sqrt{55 + y^2} = \sqrt{55 + 3^2} = \sqrt{55 + 9} = \sqrt{64} = 8$

$\mathrm{y} = -3 \rightarrow x = \sqrt{55 + y} = \sqrt{55 + (-3)^2} = \sqrt{55 + 9} = \sqrt{64} = 8$

$$\left.\begin{array}{l} x-3y<0 \\ x>2 \\ y-3x>-1 \end{array}\right\}$$

Área que delimitan las tres inecuaciones:



9. Un grupo de amigos va a cenar a un restaurante. Cuando van a pagar observan que, si cada uno pone 20 euros, sobran 5 euros; y si cada uno pone 15 euros, faltan 20 euros. ¿Cuántos amigos son y cuál es el precio total que tienen que pagar?

Definimos las incógnitas

x = número de amigos = 20
y = precio total que tienen que pagar = 95 Euros

20x - 5 = y
15x + 20 = y

$$\begin{cases} 20x - 5 = y \\ 15x + 20 = y \rightarrow 15 \cdot 5 + 20 = 75 + 20 = 95 = y \end{cases}$$

Por igualación

$$20x - 5 = 15x + 20$$

$$20x - 15x = 20 + 5$$

$$5x = 25$$

$$x = \frac{25}{5} = 5$$

Son 20 amigos y ponen 95 euros en total

10. Hemos comprado un pantalón y una camiseta por 44,1 euros. El pantalón tenía un 15% de descuento y la camiseta estaba rebajada un 10%. Si no tuvieran ningún descuento, habríamos tenido que pagar 51 euros. ¿Cuánto nos ha costado el pantalón y cuánto la camiseta?

Solución:

Llamamos x al precio del pantalón sin el descuento e y al precio de la camiseta sin descuento. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=51 \\ 0,85x+0,9y=44,1 \end{array}\right\} \rightarrow y=51-x$$

$$0,85x+0,9y=44,1 \rightarrow 0,85x+0,9(51-x)=44,1 \rightarrow 0,85x-0,9x=44,1-45,9 \rightarrow$$
$$\rightarrow -0,05x=-1,8 \rightarrow x=36$$
$$y=51-x=51-36=15$$

El pantalón costaba 36 euros y la camiseta 15 euros, sin los descuentos.

Por tanto, el precio del pantalón (con descuento) ha sido de:

36 · 0,85 = 30,6 euros

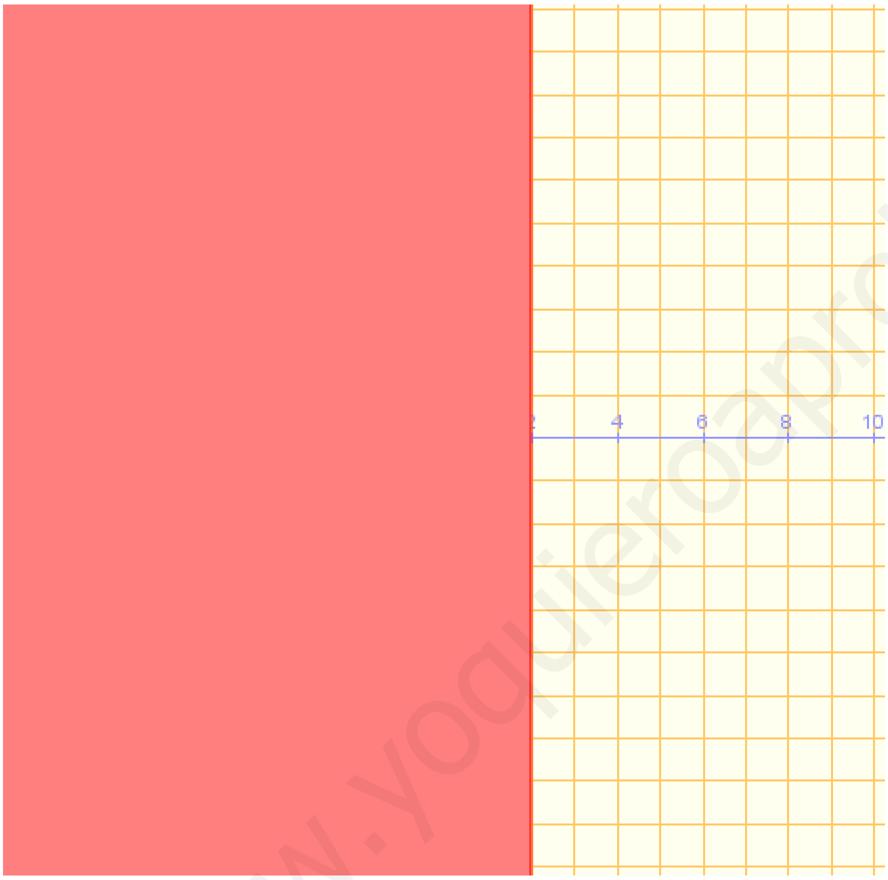
y el de la camiseta (con descuento) ha sido de:

15 · 0,9 = 13,5 euros

11. Resuelve e interpreta gráficamente esta inecuación:

$$-3x+1>-5$$

$-3x+1>-5$
$-3x>-5-1$
$-3x>-6 \rightarrow$ Si cambiamos los signos hay que cambiar el sentido de la desigualdad
$3x<6$
$x<3$



12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$

b) $2x^4-3x^3-7x^2+12x-4=0$

Solución:

a) $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3 \;\rightarrow\; \sqrt{x+20}=3+\sqrt{x-1}$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x+20}\right)^2=\left(3+\sqrt{x-1}\right)^2 \;\rightarrow x+20=9+6\sqrt{x-1}+x-1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 12=6\sqrt{x-1} \;\rightarrow\; 2=\sqrt{x-1} \;\rightarrow\; x-1=4 \;\rightarrow\; x=5$$

Comprobamos la solución:

$$\sqrt{5+20}-\sqrt{5-1}=\sqrt{25}-\sqrt{4}=5-2=3$$

La solución es $x=5$.

b) $2x^4-3x^3-7x^2+12x-4=0$

Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -3 & -7 & 12 & -4 \\
1 & & 2 & -1 & -8 & 4 \\
\hline
 & 2 & -1 & -8 & 4 & \lfloor 0 \\
2 & & 4 & 6 & -4 & \\
\hline
 & 2 & 3 & -2 & \lfloor 0 & \\
-2 & & -4 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & -1 & \lfloor 0 & &
\end{array}
\;\rightarrow\; 2x-1=0 \;\rightarrow\; x=\tfrac{1}{2}$$

Las soluciones son:

$$x_1=1,\;\; x_2=2,\;\; x_3=-2,\;\; x_4=\frac{1}{2}$$

13. Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

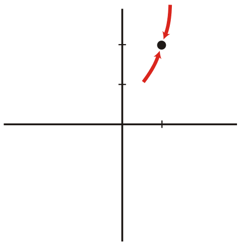
a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(-x^2 + 3x^3\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{2x-6}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

Solución:

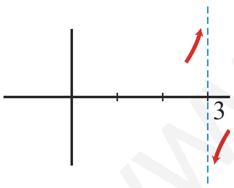
a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(-x^2 + 3x^3\right) = 2$



b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{2x-6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{2(x-3)}$

Hallamos los límites laterales:

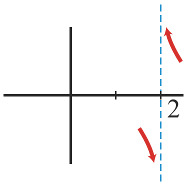
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{-1}{2x-6} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{-1}{2x-6} = -\infty$$



c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-2}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+2}{x-2} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$$



14. Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

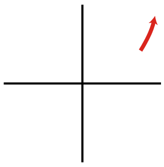
a) $\lim_{x \to +\infty} \left(-2x + 3x^3\right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2}$

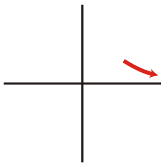
c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2}$

Solución:

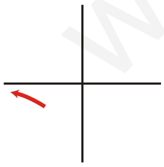
a) $\lim_{x \to +\infty} \left(-2x + 3x^3\right) = +\infty$



b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2} = 0$



c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{1+x^2} = 0$



15. Halla la derivada de las funciones:

a) $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$

b) $f(x) = \frac{4x^3 - 3}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = e^{7x^4 - 3}$

Solución:

a) $f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$

b) $f'(x) = \frac{12x^2\left(x^2 - 1\right) - \left(4x^3 - 3\right)2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{12x^4 - 12x^2 - 8x^4 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{4x^4 - 12x^2 + 6x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

c) $f'(x) = e^{7x^4 - 3} \cdot \left(28x^3\right) = 28x^3 \cdot e^{7x^4 - 3}$

16. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \le 3 \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

17. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{3 - x}{2} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$