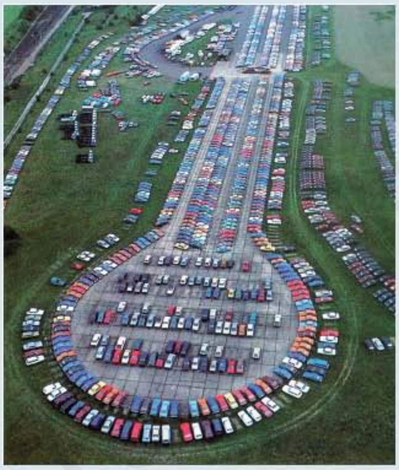
ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS



1. Determina una tabla de valores, una fórmula matemática y una gráfica de cada una de las siguientes funciones:

   a) La tarifa de precios de un aparcamiento urbano indica que el precio es de 1 euro por cada hora o fracción, siendo el precio máximo por día de 8 euros. Expresa esta función mediante su tabla de valores, su gráfica y su expresión algebraica.

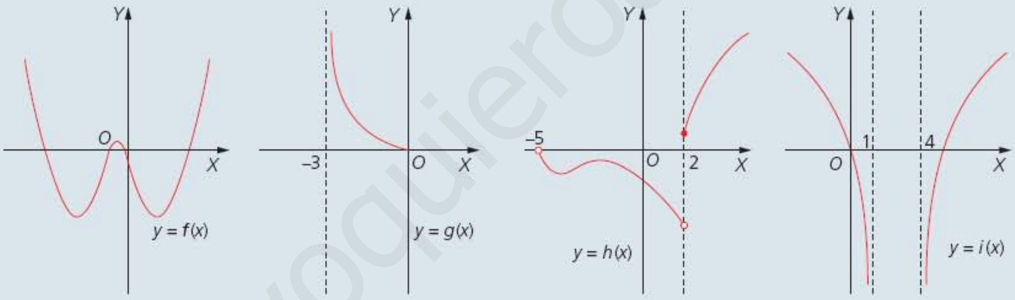
   b) El espacio, en kilómetros, que recorre un autobús que lleva una velocidad constante de 100 km/h.

   c) La tarifa de los taxis que cobran 1 euro por bajada de bandera y 0,05 euros por cada minuto recorrido en el taxi.

   d) El área de un rectángulo cuya base mide 5 m más que su respectiva altura.

   Expresar, en cada caso, sus dominios y recorrido o conjunto imagen.

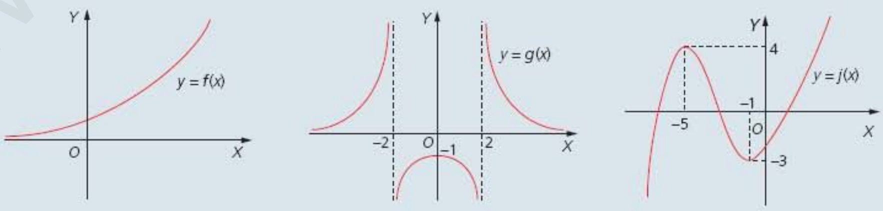
2. Estudia el dominio de las siguientes funciones:



$$j(x) = x^4 - 2x^2 \qquad k(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} \qquad l(x) = \frac{-1}{1 - x} \qquad m(x) = \sqrt{x + 2}$$

$$n(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5} \qquad o(x) = \sqrt[4]{x - 1} \qquad p(x) = \sqrt[6]{x^2 - 4} \qquad q(x) = \frac{\sqrt[5]{x^3 - 2x^2}}{x + 1}$$

3. Analiza y estudia, en cada una de las siguientes funciones, el dominio, el recorrido o conjunto imagen, la monotonía y los extremos relativos:



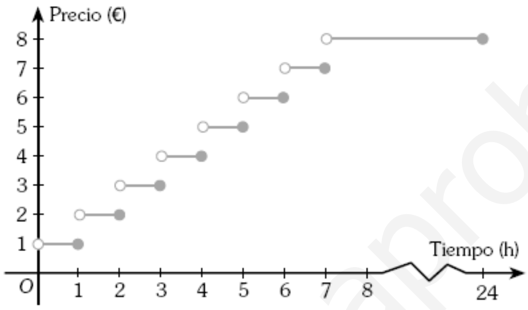
1. En cada apartado queda:

a) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

Tiempo en horas	1	1,5	2	…	8	9
Precio en euros	1	2	2	…	8	8

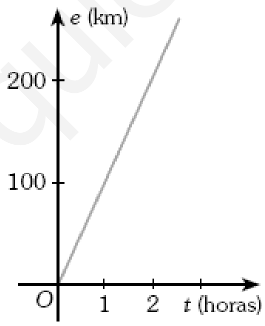
$$\text{Fórmula } f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x \le 1 \\ 2 \text{ si } 1 < x \le 2 \\ \text{-----------} \\ 8 \text{ si } 7 < x \le 24 \end{cases}$$

Dom $f = (0, +\infty)$; Im $f = [1, +\infty)$. La gráfica es:



b) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

t	e
1	100
1,5	150
2	200



Fórmula:

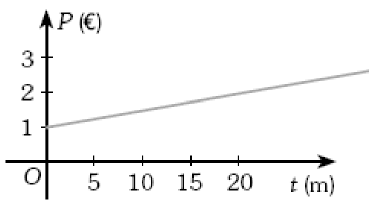
$e = 100 \cdot t$

Dom $e = [0, +\infty)$

Im $e = [0, +\infty)$

c) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

t	P
1	1,05
10	1,5
20	2



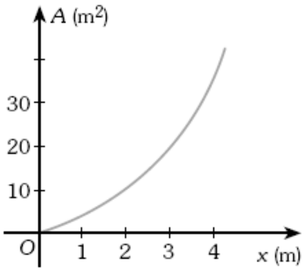
$P = 1 + 0{,}05 \cdot t$

Dom $P = [0, +\infty)$; Im $P = [1, +\infty)$

d) Llamando x a la medida de la altura sabemos que la base mide $5+x$, por tanto, la tabla de valores, la fórmula y la gráfica quedan:

$$A = x \cdot (x+5) \quad \Rightarrow \quad A = x^2 + 5x$$

x	A
1	6
2	14
3	24
4	36



$\text{Dom } A = (0, +\infty)$; $\text{Im } A = (0, +\infty)$

2. Los dominios quedan:

$\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$\text{Dom} h = (-5, +\infty)$

$\text{Dom}\, j = \mathbb{R}$

$\text{Dom}\, l = \mathbb{R} - \{1\}$

$\text{Dom}\, n = \mathbb{R}$

$\text{Dom}\, p = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$\text{Dom}\, g = (-3, 0]$

$\text{Dom}\, i = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

$\text{Dom}\, k = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$\text{Dom}\, m = [-2, +\infty)$

$\text{Dom}\, o = [1, +\infty)$

$\text{Dom}\, q = \mathbb{R} - \{-1\}$

3. Las funciones se caracterizan por:

- $y = f(x)$

  $\text{Dom} f = \mathbb{R}$; $\text{Im} f = (0, +\infty)$

  Estrictamente creciente en todo su dominio.
  No tiene extremos relativos.

- $y = g(x)$

  $\text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; $\text{Im}\, g = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

  Estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

  Estrictamente decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

  Máximo relativo $(0, -1)$

- $y = j(x)$

  Dom $j = \mathbb{R}$; Im $j = \mathbb{R}$

  Estrictamente creciente en $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

  Estrictamente decreciente en $(-5, -1)$

  Máximo relativo $(-5, 4)$

  Mínimo relativo $(-1, -3)$

PÁGINA 133

4. Dibuja las gráficas correspondientes a la funciones con las características que se citan a continuación:

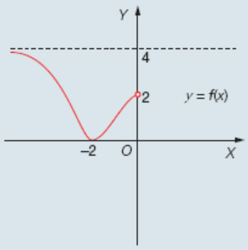
a) Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; Im $f = (-\infty, 2]$; máximos relativos en los puntos $(-3, 2)$ y $(3, 2)$.

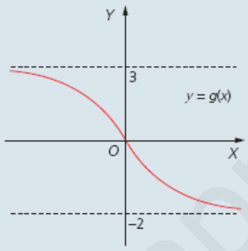
b) Dom $g = R$; Im $g = (-3, 2)$; mínimo relativo en el punto $(-2, -1)$ y máximo relativo en el punto $(0, 1)$.

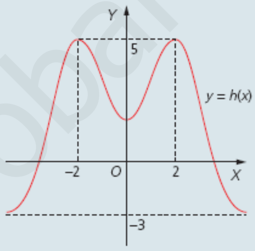
c) Dom $h = (-\infty, 0)$; Im $h = (1, +\infty)$ y estrictamente creciente en todo su dominio.

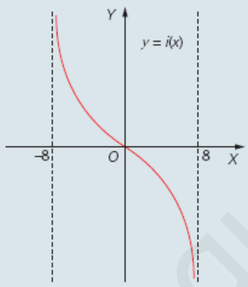
d) Dom $i = R - \{0\}$; Im $i = R$; estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$; estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$ y simétrica respecto del eje de ordenadas.

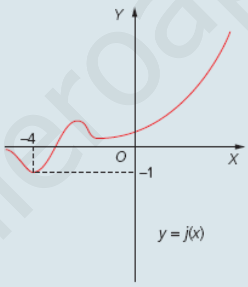
5. Estudia la acotación, simetría, tendencias y la posible existencia de supremo, ínfimo y extremos absolutos en cada una de las siguientes funciones:

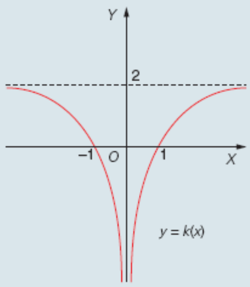












6. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$f(x) = x^6 - x^4$ $\quad g(x) = x - 1$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad i(x) = 8$

$j(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$ $\quad k(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ $\quad l(x) = |x|$ $\quad m(x) = x \cdot e^{x^2}$

7. La gráfica siguiente muestra los beneficios en miles de euros de una empresa desde el momento en que se fundó.

Contesta razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones:

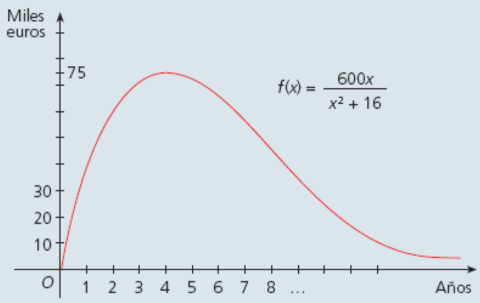
a) ¿Qué variables se relacionan?

b) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función? ¿Qué sentido tienen en el contexto del problema?

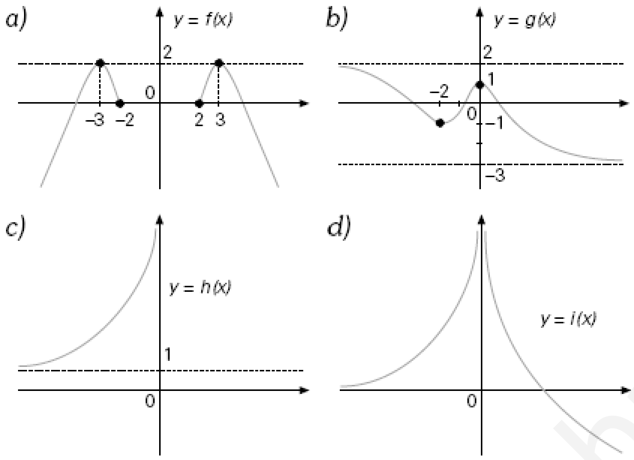
c) ¿Al cabo de cuántos años tiene la empresa beneficios máximos? ¿A cuánto ascienden estos?

d) ¿Cómo varían los beneficios los primeros años? ¿Y después?

e) ¿Crees que habrá un punto en el que no existan ni beneficios ni pérdidas?



4. Las representaciones quedan:



5. El estudio de cada función nos ofrece la siguiente información:

a) Esta función $y = f(x)$ está acotada por $y = 0$ e $y = 4$.
El supremo es $y = 4$ y el ínfimo es $y = 0$.
Esta función tiene un mínimo absoluto en $y = 0$.

b) Esta función $y = g(x)$ está acotada por $y = 3$ e $y = -2$.
El supremo es $y = 3$ y el ínfimo es $y = -2$.
Esta función no tiene extremos absolutos.

c) Esta función $y = h(x)$ está acotada por $y = -3$ e $y = 5$.
El supremo es $y = 5$ y el ínfimo es $y = -3$.
Esta función tiene un máximo absoluto en $y = 5$.

d) Esta función $y = i(x)$ no está acotada.

e) Esta función $y = j(x)$ está acotada inferiormente por $y = -1$.
El ínfimo es $y = -1$ y no tiene supremo.
Esta función tiene un mínimo absoluto en $y = -1$.

f) Esta función $y = k(x)$ está acotada superiormente por $y = 2$.
El supremo es $y = 2$ y no tiene ínfimo.
Esta función no tiene extremos absolutos.

6. Las simetrías en cada caso son:

- Las funciones: *f*; *i*; *k*; *l*; son simétricas respecto al eje de ordenadas.
- Las funciones: *h*; *j*; *m*; son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- Las demás funciones no tienen simetrías.

7. En cada caso las respuestas son:

a) La variable independiente es el número de años desde su fundación, y la variable dependiente el beneficio en miles de euros.

b) $\text{Dom} f = [0, +\infty)$ $\quad \text{Im} f = [0, 75]$

c) La empresa tiene beneficios máximos al cabo de 4 años, y estos ascienden a 75 000 euros.

d) Durante los primeros cuatro años los beneficios crecen; a partir del 4º año empiezan a decrecer.

e) Como en todo el dominio se verifica que $f(x) > 0$, no habrá pérdidas en ningún momento; siempre habrá beneficios.

PÁGINA 134

ACTIVIDADES FINALES

■ 8. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ y $g(x) = x - 1$, calcula:

a) Dom f; Dom g b) $f + g$; $f \cdot g$; $\dfrac{f}{g}$ y sus dominios c) $\dfrac{1}{f}$ y el dominio

■ 9. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ y $g(x) = x^2 + 2$, determina las siguientes funciones con sus respectivos dominios:

a) $f + g$ b) $f \cdot g$ c) $\dfrac{f}{g}$ d) $g \circ f$ e) $g \circ g$

■ 10. Dadas las funciones $f(x) = 1 + 3x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$; calcula:

a) $f \circ g$ c) $f \circ h$ e) $(g \circ f)(-1)$

b) $h \circ g$ d) $(f \circ f)(1)$ f) $(h \circ h)(0)$

■ 11. Siendo $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = 3x - a$, calcula el valor de a para que la composición de ambas sea conmutativa, es decir, $f \circ g = g \circ f$.

■ 12. Dadas las siguientes funciones, halla, en cada caso, las dos funciones que, compuestas, resultan la que se indica:

$(f \circ g)(x) = (x^3 + 2)^2$ $(h \circ l)(x) = 3^{2x}$ $(t \circ p)(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

■ 13. Determina las funciones inversas de:

a) $f(x) = 5$ c) $f(x) = (x+1)^2$ e) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+5}$

b) $f(x) = 2x - 3$ d) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ f) $f(x) = \dfrac{3-x}{3x+1}$

■ 14. Calcula la función inversa de cada una de las siguientes y comprueba, en cada caso, que la función dada compuesta con su inversa, da la función identidad:

$f(x) = x^3 - 2$ $g(x) = 1 - 3x$ $h(x) = 2^{x+2}$

■ 15. Sea $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$ y $g(x) = 2x - 4$. Calcula $(f \circ g)^{-1}(4)$.

■ 16. En el año 1995 se fundó una ONG. El número de sus afiliados ha variado con los años según la función:

$$N = 250\,(2t^2 - 12t + 21)$$

¿Cuántos son los afiliados fundadores? Ayudándote de una calculadora indica cómo varía el número de afiliados. ¿En algún momento será nulo este número?

■ 17. Una empresa *Cable I* ofrece una tarifa de utilización de Internet de 15 euros mensuales. La empresa *Cable II* ofrece una tarifa de 0,05 euros por hora. Discute qué tarifa te parece la más conveniente a la hora de elegir.

8. En cada caso queda:

a) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ $\quad$ $\text{Dom} g = \mathbb{R}$

b) Quedan:

$$(f+g)(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x+3}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+3}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad \Rightarrow \quad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

c) Queda:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3} \quad \Rightarrow \quad \text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

9. Los dominios quedan:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x}{2-x} + x^2 + 2 = \dfrac{-x^3 + 2x^2 - x + 4}{2-x} \Rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x}{2-x} \cdot (x^2 + 2) = \dfrac{x^3 + 2x}{2-x} \Rightarrow \text{Dom}\, f \cdot g = \mathbb{R} - \{2\}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{2-x} : (x^2 + 2) = \dfrac{x}{(2-x)\,(x^2+2)} \Rightarrow \text{Dom}\, \dfrac{f}{g} = \mathbb{R} - \{2\}$

d) $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)] = g\left[\dfrac{x}{2-x}\right] = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^2 + 2 = \dfrac{3x^2 - 8x + 8}{4 - 4x + x^2} \Rightarrow \text{Dom}\, g \circ f = \mathbb{R} - \{2\}$

e) $(g \circ g)(x) = g\,[g(x)] = g\,[x^2 + 2] = (x^2+2)^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6 \Rightarrow \text{Dom}\, g \circ g = \mathbb{R}$

10. Las soluciones son:

a) $f \circ g(x) = 1 + 3x$

b) $h \circ g(x) = \frac{3}{x+1}$

c) $f \circ h(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 28}{x^4 + 2x^2 + 1}$

d) $(f \circ f)(1) = 49$

e) $(g \circ f)(-1) = 2$

f) $(h \circ h)(0) = \frac{3}{10}$

11. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{r}(f \circ g)(x) = f\,[g\,(x)] = f\,(3x - a) = 5 + a - 3x \\ (g \circ f)(x) = g\,[f\,(x)] = g\,(5 - x) = 3\,(5 - x) - a = 15 - a - 3x\end{array}\right\} \Rightarrow a = 5$$

12. Por ejemplo, las funciones pueden ser:

$f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = x^3 + 2$

$h(x) = 3^x$ $\qquad l(x) = 2x$

$t(x) = \frac{x+1}{x+2}$ $\qquad p(x) = x^2$

13. Las inversas quedan:

a) $f^{-1}(x)$ no existe

b) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

d) $f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x}$

e) $f^{-1}(x) = \frac{5x}{3-2x}$

f) $f^{-1}(x) = \frac{3-x}{3x+1}$

14. Las inversas quedan:

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$ $\qquad g^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$ $\qquad h^{-1}(x) = \frac{\log x}{\log 2} - 2$

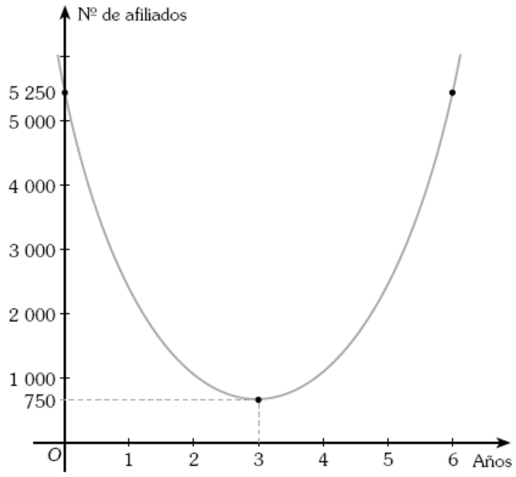
15. Queda:

$$(f \circ g)(x) = x - 3 \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)^{-1}(x) = x + 3 \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)^{-1}(4) = 7$$

16. La solución queda:

Haciendo $t=0$ obtenemos $N=5\,250$ socios fundadores.

La gráfica de la función viene dada por:



El número de afiliados desciende los tres primeros años hasta alcanzar el número de 750 y, a partir de ese año, empieza a aumentar.
En ningún momento es nulo este número.

17. La solución queda:

$$\textit{Cable I} \;\Rightarrow\; P=15$$
$$\textit{Cable II} \;\Rightarrow\; P=0{,}05\cdot t$$

Veamos a partir de qué número de horas el precio de una empresa y de la otra es el mismo:

$$0{,}05\cdot t=15 \quad \Rightarrow \quad t=300 \text{ horas}$$

Hasta 300 horas mensuales interesa más la empresa *Cable II*; a partir de 300 horas mensuales interesa más la empresa *Cable I*, y si se utiliza Internet durante 300 horas mensuales exactamente es indistinta la empresa a elegir.