PÁGINA 68

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1 - \frac{x+1}{6} = \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6}$

b) $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{3}{4} = 2$

c) $\frac{8}{x} - 1 = \frac{4}{x}$

d) $\frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x\,(x+3) = 3\,(x-1)$

b) $x + 1 = \frac{6}{x}$

c) $(x+2)\,(x-2) = 2\,(x+5) + 21$

d) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$

e) $(x^2-5)\,(x^2-3) = -1$

f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

g) $9x^4 + 5x^2 = 4$

h) $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$

i) $(x^2-16)\,(x^2+25) = 0$

j) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

3. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla el valor de m en la ecuación $x^2 + mx - 24 = 0$ sabiendo que una de las raíces es 8.

b) Las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ son 2 y -3. Halla a y b.

c) Halla b en la ecuación $2x^2 + bx + 50 = 0$ para que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

d) Dada la ecuación $x^2 + 6x = 0$, escribe una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones las soluciones dobles de las de la ecuación dada.

4. Descompón 200 en dos partes de forma que la cuarta parte de la primera menos la quinta parte de la segunda de 32.

5. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que estas suman 11 y que si invertimos el orden de las cifras el número obtenido excede en 45 al número dado.

6. La edad actual de Luis es el triple de la de su hija María. Halla las edades de ambos sabiendo que dentro de 16 años el padre tendrá doble edad que la hija.

7. En un parking hay 37 vehículos entre coches, motos y camiones de 6 ruedas. El número de motos excede en 3 al de coches y camiones juntos. Halla el número de vehículos de cada clase si en total suman 118 ruedas.

8. La diferencia de cuadrados de dos números pares consecutivos es 100. ¿Cuáles son esos números?

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

a) $x=\frac{6}{5}$ b) $x=3$ c) $x=4$ d) $x=\frac{3}{5}$

2. Las soluciones son:

a) $2x(x+3)=3(x-1) \Leftrightarrow 2x^2+3x+3=0$ No tiene soluciones reales.

b) $x+1=\frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-3$

c) $(x+2)(x-2)=2(x+5)+21 \Leftrightarrow x^2-2x-35=0 \Rightarrow x_1=7;\ x_2=-5$

d) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2 \Leftrightarrow x^2+6x-27=0 \Rightarrow x_1=3;\ x_2=-9$

e) $(x^2-5)(x^2-3)=-1 \Leftrightarrow x^4-8x^2+16=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-2$

f) $x^4-13x^2+36=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=3;\ x_4=-3$

g) $9x^4+5x^2=4 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3};\ x_2=-\frac{2}{3}$

h) $4x^4-65x^2+16=0 \Rightarrow x_1=4;\ x_2=-4;\ x_3=\frac{1}{2};\ x_4=-\frac{1}{2}$

i) $(x^2-16)(x^2+25)=0 \Rightarrow x^2-16=0 \Rightarrow x_1=4;\ x_2=-4$

j) $x^3+2x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)(x+3)=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-1;\ x_3=-3$

3. Las soluciones quedan:

a) Si una de las raíces de la ecuación es 8, ésta verificará la misma; es decir: $8^2+8m-24=0 \Rightarrow m=-5$.

b) Si las raíces de la ecuación son 2 y -3, éstas deben verificar la ecuación, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 4+2a+b=0 \\ 9-3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=-6 \end{array}$$

c) Las dos raíces son iguales si el valor del discriminante es nulo, es decir:

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 20$$

d) La ecuación $x^2 + 6x = 0$ tiene como soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = -6$. La ecuación que tenga como soluciones las dobles de las anteriores, $x_1 = 0$ y $x_2 = -12$, es: $x^2 + 12x = 0$.

4. Las dos partes de *x* e *y* deben verificar:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 200 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{5} = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 160 \\ y = 40 \end{array} \Rightarrow \text{Luego las dos partes son 160 y 40.}$$

5. Llamando *xy* al número de dos cifras e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ (10y + x) - (10x + y) = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 8 \end{array} \Rightarrow \text{Por tanto el número buscado es 38.}$$

6. Llamando *x* a la edad de Luis e *y* a la edad de María. Se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3y \\ x + 16 = 2(y + 16) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 48 \\ y = 16 \end{array} \Rightarrow \text{Luis tiene 48 años y María tiene 16 años.}$$

7. Llamando *x* al número de coches, *y* al número de motos y *z* al de camiones. Se tiene que cumplir:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 37 \\ y = 3 + x + z \\ 4x + 2y + 6z = 118 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 12 \text{ coches} \\ y = 20 \text{ motos} \\ z = 5 \text{ camiones} \end{array}$$

8. Sean los número pares consecutivos: $(2x + 2)$ y $(2x)$. Se debe cumplir:

$$(2x + 2)^2 - (2x)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 12 \quad \Rightarrow \quad \text{Los números buscados son 26 y 24.}$$

PÁGINA 69

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2 - 5} = 2$

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 2x - 1$

c) $\sqrt{x^2 + 9} + x^2 = 21$

d) $3x - 3\sqrt{x + 3} = x + 3$

e) $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{2x - 4} = 3$

f) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 6} = \dfrac{3}{\sqrt{x + 3}}$

10. El dividendo de una división es 1 081. El cociente y el resto son iguales y el divisor es doble del cociente. Halla el divisor.

11. Los dos catetos de un triángulo rectángulo difieren en 5 unidades y la hipotenusa mide 25 cm. Calcula los catetos.

12. La suma de un número y su inverso es $\dfrac{34}{15}$; ¿cuánto vale el número?

13. El número de días que tiene un año tiene la propiedad de ser el único número que es suma de los cuadrados de tres números consecutivos. Además, es también suma de los cuadrados de los dos números consecutivos a los anteriores. Demuéstralo.

14. Resuelve los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} \\ 4y = x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \dfrac{y-2}{2} = 7 \\ \dfrac{3}{2}(x-2) + 2y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2(x+3) \\ x - 5 = 3(2 - y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 160 \\ x - y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = -30 \end{cases}$

15. Halla las dimensiones del rectángulo de 60 cm² de área y cuya base es 7 cm más larga que su altura.

16. Marta quiere hacer el marco de un espejo con un listón de madera de 2 m, sin que le sobre ni le falte nada. Sabiendo que el espejo es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm², ¿de qué longitud deben ser los trozos que ha de cortar?

17. La suma de las áreas de dos cuadrados es 3 250 m² y su diferencia 800 m². Calcula la medida de sus lados.

18. Dos albañiles hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría en 4 horas. Calcula el tiempo que tardaría en hacerlo el otro solo.

19. Los estudiantes de 1º de Bachillerato están preparando una excursión. La agencia de viajes les da un presupuesto de 1 620 euros. En el último momento, dos estudiantes se ponen enfermos y, al no poder ir de excursión, el resto ha de pagar 4,80 euros más cada uno. ¿Cuántos estudiantes había en el curso?

20. En un multicine hay dos salas de proyección, una grande en la cual las entradas valen a 5 euros y otra pequeña en la cual el precio de las entradas es igual al 75% del precio de las mismas en la otra sala. Un día en que asistieron al multicine 280 personas se recaudaron 1 287,5 euros. ¿Cuántas personas estuvieron en cada sala?

9. Las soluciones quedan:

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2-9=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=3;\ x_2=-3$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $3x^2+x-2=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=-1;\ x_2=\frac{2}{3}$. La solución que verifica la ecuación dada es $x=\frac{2}{3}$.

c) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$x^4-43x^2+432=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3\sqrt{3};\ x_2=-3\sqrt{3};\ x_3=4;\ x_4=-4$$

Las soluciones que verifican la ecuación dada son: $x_1=4;\ x_2=-4$

d) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$4x^2-21x-18=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=6;\ x_2=-\frac{3}{4} \ \text{ donde la solución buscada es}:\ x_1=6$$

e) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $-1=\sqrt{2x-4}$ y elevando de nuevo se obtiene $x=\frac{5}{2}$, sin embargo esta solución no verifica la ecuación inicial, por lo que se concluye que no existe solución.

f) Elevando al cuadrado y operando:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\frac{3}{\sqrt{x+3}} \quad \Rightarrow \quad 3=x+3+\sqrt{(x+6)(x+3)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9x+18}=-x$$

Elevando al cuadrado se obtiene: $9x+18=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

10. Las condiciones del problema nos dan:

$$\begin{array}{r|l} 1081 & 2x \\ \hline x & x \end{array}$$

De donde se extrae: $1081=2x^2+x$ cuyas soluciones son: $x_1=23;\ x_2=-23{,}5$.
El divisor de esta división es -47 ó 46.

11. El triángulo tiene por catetos x, $x-5$ y por hipotenusa 25, por lo tanto:

$$x^2+(x-5)^2=25^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-5x-300=0 \quad \Rightarrow \quad x=20\,\text{cm}$$

Un cateto mide 20 cm y el otro 15 cm.

12. Llamando x al número e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{34}{15} \quad \Leftrightarrow \quad 15x^2-34x+15=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Las soluciones son: } x_1=\frac{5}{3};\ x_2=\frac{3}{5}$$

13. La demostración queda:

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=365 \quad \Rightarrow \quad x=11 \quad \Rightarrow \quad \text{Los números son: } 10, 11 \text{ y } 12.$$

Los números consecutivos a éstos son: 13 y 14 y se cumple $13^2+14^2=365$.

14. La solución de los sistemas queda del siguiente modo:

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3} \\ 4y=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=160 \\ x-y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-4;\ y=-12 \\ x=12;\ y=4 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{y-2}{2}=7 \\ \dfrac{3}{2}(x-2)+2y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ y=-4 \end{array}$

e) $\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=21 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=5 \\ y=-2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r} y=2(x+3) \\ x-5=3(2-y) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=4 \end{array}$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ x\cdot y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=10;\ y=-3 \\ x=-3;\ y=10 \end{array}$

15. Llamando x a la longitud de la altura, la base tendrá por longitud $(7+x)$. Conocida el área se verifica:

$$x(7+x)=60 \quad \Rightarrow \quad x=5\,\text{cm}$$

El rectángulo mide 5 cm de altura y 12 cm de base.

16. Llamando x a la longitud de la base e y a la altura e imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=20 \\ x\cdot y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=6\text{ cm} \\ y=4\text{ cm} \end{array} \text{ o bien } \begin{array}{l} x=4\text{ cm} \\ y=6\text{ cm} \end{array}$$

17. Llamando x al área de un cuadrado e y al área del otro obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3\,250 \\ x-y=800 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2\,025 \text{ m}^2 \\ y=1\,225 \text{ m}^2 \end{array}$$

De donde el lado de un cuadrado mide 35 m y el del otro 45 m.

18. Llamando x al tiempo que tarda él solo en hacer el trabajo obtenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x=12 \text{ horas tardaría él solo.}$$

19. Llamamos x al número de estudiantes del curso e y a la cantidad de dinero que paga cada uno. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot y=1\,620 \\ (x-2)(y+4{,}8)=1\,620 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=27 \text{ estudiantes} \\ y=60 \text{ euros paga cada uno} \end{cases}$$

20. Llamando x al número de personas que asistieron a la sala grande e y al número de personas de la sala pequeña; imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+3{,}75y=1287{,}5 \\ x+y=280 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=190 \text{ personas en la sala grande} \\ y=90 \text{ personas en la sala pequeña.} \end{array}$$

PÁGINA 70

ACTIVIDADES FINALES

21. Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + 5z = 10 \\ x + y - 4z = -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ x + z = 2 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + t = 6 \\ x - t = -1 \\ 3x + 2y + t = 11 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

22. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de la de las decenas más el doble de la de las unidades. Si se permutan entre sí las cifras de las centenas y la de las unidades, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.

23. Un hombre le dijo a su hijo: *cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual. Sí*, contestó el hijo, *pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía*. ¿Cuál es la edad actual del hijo?

24. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

25. Las edades de una familia formada por los padres y una hija suman 86 años. Halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que la edad de la madre es triple de la edad de la hija, y las edades del padre y de la hija difieren en 26 años.

26. Un país importa 22 400 vehículos entre motos, coches y todoterrenos, al precio de 4 800, 9 000 y 9 500 euros, respectivamente. Si el total de los vehículos importados cuesta 168,65 millones de euros, ¿cuántos vehículos de cada tipo importa este país si de coches importa el 60% de la suma de motos y todoterrenos?

27. En un centro hay dos equipos de fútbol, A y B. Si del equipo A pasan tres personas al B, en ambos queda el mismo número. En cambio, si del B pasan 7 al A, queda en este un número que es el cuadrado de los de aquel. ¿Cuántos deportistas hay en cada equipo?

21. Las soluciones quedan:

a) $x=1;\ y=2$
b) $x=1;\ y=-2;\ z=2$
c) $x=-1;\ y=2;\ z=3$
d) $x=1;\ y=-2;\ z=3$
e) $x=16;\ y=2;\ z=4$
f) $x=-1;\ y=1;\ z=-2$
g) Sistema incompatible. No tiene solución.
h) $x=t-1;\ y=7-2t$. Sistema indeterminado.
i) $x=1;\ y=1;\ z=2$

22. Sea el número *xyz*.
De las siguientes condiciones del enunciado obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x=y+2z \\ xyz-zyx=297 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=297 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $x=4,\ y=2,\ z=1$
El número buscado es el 421.

23. Llamando *x* a la edad del padre e *y* a la edad del hijo obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y+\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{2} \\ x-4=11\,(y-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+6y=0 \\ x-11y=-40 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=48 \\ y=8 \end{array}$$

El padre tiene 48 años y el hijo 8 años.

24. Sea el número *xyz*.
Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=594 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=9 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}$$

El número es el 963.

25. Llamamos x a la edad del padre, y a la edad de la madre y z a la edad de la hija. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=86 \\ y=3z \\ x-z=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=38 \\ y=36 \\ z=12 \end{array}$$

El padre tiene 38 años, la madre 36 años y la hija 12 años.

26. Llamamos x al número de motos que importa este país, y al de coches y z al de todoterrenos. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=22\,400 \\ 4\,800x+9\,900y+9\,500z=168{,}65\cdot 10^6 \\ y=\dfrac{60}{100}(x+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=8\,500 \text{ motos} \\ y=8\,400 \text{ coches} \\ z=5\,500 \text{ todoterrenos} \end{array}$$

27. En el equipo A hay x futbolistas y en el equipo B hay y futbolistas.

$$\left.\begin{array}{l} x-3=y+3 \\ x+7=(y-7)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=18 \text{ futbolistas en el equipo A} \\ y=12 \text{ futbolistas en el equipo B} \end{array}$$