

13 Cálculo de probabilidades

ACTIVIDADES INICIALES

- 13.I. Una marca de coches comercializa un determinado modelo en tres versiones: cinco puertas, tres puertas y familiar. El motor puede ser diésel o gasolina. Está disponible en 5 colores. ¿Cuántos tipos de coches diferentes se fabrican de dicho modelo?

Aplicando el principio de multiplicación habrá $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ coches diferentes.

- 13.II. En España, las matrículas de los coches están formadas por cuatro cifras y tres letras escogidas entre las 27 del alfabeto castellano, incluida la W, pero no las vocales ni la Ñ ni la Q. ¿Cuántos vehículos se podrán matricular con este sistema?

Para formar las matrículas se utilizan las 10 cifras significativas y un total de $27 - 5 - 2 = 20$ letras.

Aplicando el principio de multiplicación, se pueden formar un total de $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8 \cdot 10^7$ matrículas diferentes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 13.1. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 20 alumnos en los cuatro asientos de la primera fila de la clase? ¿Y si el primer puesto está reservado siempre para el delegado?

En el primer caso se trata de elegir ordenadamente a cuatro alumnos entre 20:

$$V_{20,4} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116\,280 \text{ formas distintas}$$

En el segundo caso, como el delegado ocupa un lugar fijo, se trata de elegir ordenadamente a tres alumnos entre 19:

$$V_{19,3} = 19 \cdot 18 \cdot 17 = 5814 \text{ formas distintas}$$

- 13.2. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, ¿cuántos números de cuatro cifras, múltiplos de cinco, se pueden formar?

Para que un número sea múltiplo de 5, su última cifra debe ser 0 ó 5; por tanto, los números que hay que formar deben tener como cifra de las unidades el 5; es decir, los números serán de la forma $abc5$. Se trata de calcular cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Como no piden que las cifras sean distintas, se podrán formar:

$$VR_{7,3} = 7^3 = 343 \text{ múltiplos de cinco.}$$

- 13.3. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra MÉDICO, de forma que dos de ellas estén siempre juntas?

- a) Guardando siempre las dos letras el mismo orden.
b) Estando las dos letras juntas pero en cualquier orden.

- a) Como las letras han de estar siempre juntas y en el mismo orden, las consideraremos una sola letra; por ello haremos las permutaciones de cinco elementos.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ palabras diferentes}$$

- b) Como las dos letras pueden estar juntas pero en cualquier orden, el número de palabras diferentes será:

$$2P_5 = 2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240 \text{ palabras diferentes}$$

- 13.4. Seis amigos organizan un torneo de pádel. En la primera fase se han de enfrentar de todas las formas posibles. ¿Cuántos partidos se deberán organizar?

Como no influye el orden cuando se forma una pareja para enfrentarse, entonces se trata de las combinaciones de seis elementos tomados dos a dos.

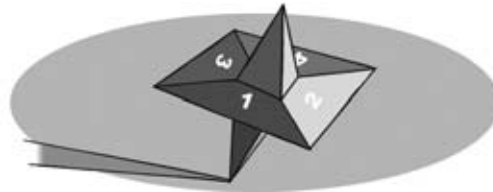
$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ partidos se pueden organizar}$$

13.5. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ¿cuántos productos diferentes se pueden hacer con cinco dígitos no repetidos?

Como el orden de factores no altera el producto, se trata de combinaciones de nueve elementos tomadas de cinco en cinco.

$$C_{9,5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126 \text{ productos diferentes}$$

13.6. Se hace girar la ruleta de la figura y se anota el resultado obtenido.



- Forma el espacio muestral.
- Forma los sucesos $A = \text{“salir múltiplo de 2”}$ y $B = \text{“salir divisor de 24”}$.
- Forma los sucesos contrarios de A y de B .

- $E = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A = \{2, 4\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\} = E$
- $\bar{A} = \{1, 3\}$ $\bar{B} = \emptyset$

13.7. Una urna contiene cinco bolas blancas y tres negras. Se elige una bola al azar, se anota su color, se devuelve a la urna y se repite la operación otras dos veces.

- Forma el espacio muestral.
- Escribe los elementos de los siguientes sucesos.
 $A = \text{“salir exactamente una bola blanca”}$.
 $B = \text{“salir al menos una bola blanca”}$.
 $C = \text{“salir al menos dos bolas blancas”}$
- ¿Qué relación hay entre los sucesos B y C ?

- $E = \{BBB, BBN, BNB, BNN, NBB, NBN, NNB, NNN\}$
- $A = \{BNN, NBN, NNB\}$
 $B = \{BBB, BBN, BNB, BNN, NBB, NBN, NNB\}$
 $C = \{BBB, BBN, BNB, NBB\}$
- $C \subset B$

13.8. En una bolsa hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Se realiza un experimento que consiste en la extracción de una bola, en anotar su número y en devolverla a la bolsa, y se consideran los sucesos:

- $A = \text{“salir divisor de 12”}$.
 $B = \text{“salir múltiplo de 2”}$.
 Forma los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

- $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
 $B = \{2, 4, 6, 8\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
 $A - B = \{1, 3\}$

13.9. Se considera el experimento de extraer dos cartas consecutivas de un mazo de 6 cartas de la baraja española que contiene solo las figuras de los palos de bastos y de espadas. Sean los sucesos:

A = "extraer dos cartas de palos distintos".

B = "extraer los dos reyes".

Comprueba que se cumplen las leyes de Morgan.

$$A = \{S_E S_B, S_E C_B, S_E R_B, C_E S_B, C_E C_B, C_E R_B, R_E S_B, R_E C_B, R_E R_B, S_B S_E, S_B C_E, S_B R_E, C_B S_E, C_B C_E, C_B R_E, R_B S_E, R_B C_E, R_B R_E\}$$

$$B = \{R_E R_B, R_B R_E\}$$

$$\bar{A} = \{S_E C_E, S_E R_E, C_E S_E, C_E R_E, R_E S_E, R_E C_E, S_B C_B, S_B R_B, C_B S_B, C_B R_B, R_B S_B, R_B C_B\}$$

$$\bar{B} = \{S_E C_E, S_E R_E, S_E S_B, S_E C_B, S_E R_B, C_E S_E, C_E R_E, C_E S_B, C_E C_B, C_E R_B, R_E S_E, R_E C_E, R_E S_B, R_E C_B, S_B S_E, S_B C_E, S_B R_E, S_B C_B, S_B R_B, C_B S_E, C_B C_E, C_B R_E, C_B S_B, C_B R_B, R_B S_E, R_B C_E, R_B S_B, R_B C_B\}$$

$$A \cup B = A \quad (\overline{A \cap B}) = \bar{A} \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A}$$

$$A \cap B = B \quad (\overline{A \cup B}) = \bar{B} \quad \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{B}$$

13.10. En el experimento de lanzar dos dados cúbicos se consideran los sucesos $A = \{\text{salir dos pares}\}$ y $B = \{\text{obtener como suma un número primo}\}$.

Calcula las probabilidades de los sucesos:

$$A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup B \text{ y } A \cap B$$

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

A y B son incompatibles, por tanto.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{9}{36} + \frac{15}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \quad P(A \cap B) = 0$$

13.11. Una bolsa contiene 2 cubos rojos y 4 verdes, y 3 bolas rojas y 5 verdes. Si se extrae un objeto, calcula la probabilidad de que:

a) Sea un cubo o que sea rojo.

b) Sea una bola verde.

c) Sea verde o una bola.

Organizamos los datos en una tabla:

	Rojos	Verdes	
Bolas	3	5	8
Cubos	2	4	6
	5	9	14

$$a) P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = \frac{6}{14} + \frac{5}{14} - \frac{2}{14} = \frac{9}{14}$$

$$b) P(B \cap V) = \frac{5}{14}$$

$$c) P(V \cup B) = P(V) + P(B) - P(V \cap B) = \frac{9}{14} + \frac{8}{14} - \frac{5}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

13.12. Se tiene una urna con 15 bolas negras y 10 blancas, y se realizan dos extracciones sucesivas de una bola. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas en los siguientes casos.

- a) Con devolución a la urna de la primera bola extraída.
 b) Sin devolución.

Se consideran los sucesos:

B_1 = "sacar bola blanca en la primera extracción", B_2 = "sacar bola blanca en la segunda extracción"

a) Si la extracción es con devolución, los sucesos B_1 y B_2 son independientes; por tanto,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{10}{25} \cdot \frac{10}{25} = \frac{4}{25}$$

b) Si la extracción es sin devolución, los sucesos B_1 y B_2 son dependientes; por tanto,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20}$$

13.13. (PAU) En una población hay el doble de mujeres que de hombres. El 25% de las mujeres y el 10% de los hombres son rubios.

- a) Si se elige al azar una persona y resulta ser rubia, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre y no sea rubia?

Sea x el número de hombres, entonces el número de mujeres es $2x$. Teniendo en cuenta el número de hombres y mujeres formamos la siguiente tabla de contingencia:

	Hombres	Mujeres	
Rubios	$\frac{10x}{100}$	$\frac{25 \cdot 2x}{100}$	$\frac{60x}{100}$
No rubios	$\frac{90x}{100}$	$\frac{75 \cdot 2x}{100}$	$\frac{240x}{100}$
	x	$2x$	$3x$

a) $P(\text{Mujer} / \text{Rubia}) = \frac{\frac{25}{100} \cdot 2x}{\frac{60x}{100}} = \frac{5}{6}$ b) $P(H \cap M) = \frac{90x}{3x} = \frac{3}{20}$

13.14. Se lanza cuatro veces un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

- a) Halla la probabilidad de obtener siempre número impar.
 b) Halla la probabilidad de obtener número par seguido de número impar, y así sucesivamente.

a) $P(\text{cuatro veces número impar}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ b) $P(\text{par} - \text{impar} - \text{par} - \text{impar}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

13.15. Una urna contiene 12 bolas rojas y 8 negras, y se extraen sucesivamente 4 bolas. Halla la probabilidad de que las cuatro sean rojas:

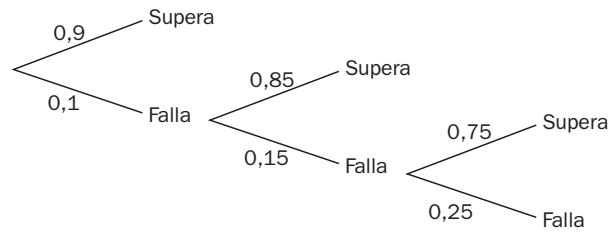
- a) Con devolución.
 b) Sin devolución.

a) $P(\text{las cuatro bolas rojas}) = \left(\frac{12}{20}\right)^4$ b) $P(\text{las cuatro bolas rojas}) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{33}{323}$

13.16. En una pequeña empresa trabajan 10 personas: 4 de ellas son fijas y 6 tienen un contrato temporal. ¿Cuál es la probabilidad de que, seleccionados tres trabajadores al azar, tengan todos un contrato temporal?

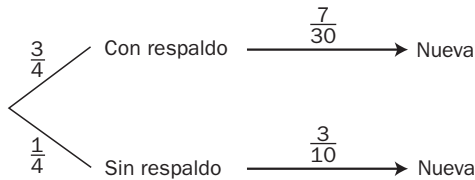
$P(\text{los tres tengan contrato temporal}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$

- 13.17. Un saltador de altura sabe que la probabilidad que tiene de superar cierta marca varía dependiendo del intento, pues influyen factores psicológicos y de cansancio. Ha estimado que la probabilidad de superarla en el primer intento es 0,9; si falla en el primero, la probabilidad de superarla en el segundo es 0,85, y la de superarla en el tercero, condicionado a que ha fallado en los dos anteriores, es 0,75. Calcula la probabilidad de que falle en los tres intentos.



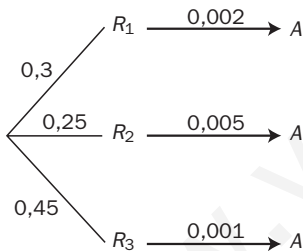
$$P(\text{falle en tres intentos}) = 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,25 = 0,00375$$

- 13.18. (PAU) En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas, y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas. Elegida al azar una silla, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?



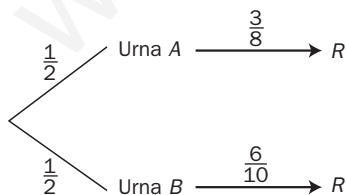
$$P(\text{nueva}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{30} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{4}$$

- 13.19. (PAU) Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30%, de la primera; el 25%, de la segunda, y el 45%, de la tercera. La proporción de tigres albinos es del 0,2% en la primera reserva, del 0,5% en la segunda y del 0,1% en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?



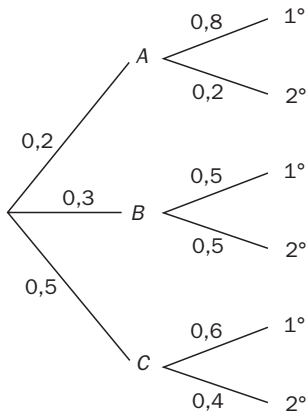
$$P(\text{albino}) = 0,3 \cdot 0,002 + 0,25 \cdot 0,005 + 0,45 \cdot 0,001 = 0,0023$$

- 13.20. Se tiene una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules, y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Se elige una urna al azar y se saca una bola. Halla la probabilidad de que sea roja.



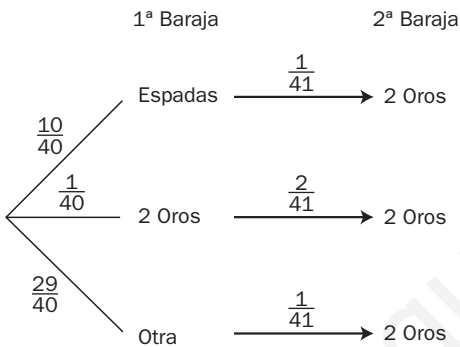
$$P(\text{roja}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{39}{80}$$

- 13.21. (PAU) Los alumnos de Bachillerato de un centro escolar proceden de 3 pueblos, A, B y C, siendo un 20% de A, un 30% de B y el resto de C. El 80% de los alumnos de A cursa 1.º, y el resto, 2.º El 50% de los alumnos de B cursa 1.º, y el resto, 2.º. El 60% de los alumnos de C cursa 1.º, y el resto, 2.º Seleccionado al azar un alumno de Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2.º?



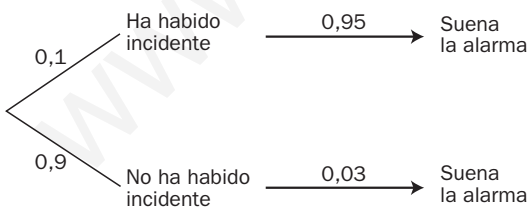
$$P(2.^{\circ}) = 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,39$$

- 13.22. (PAU) Se toman dos barajas españolas de 40 cartas cada una. Se extrae una carta de la primera baraja y se introduce en la segunda baraja. Se mezclan las cartas de esta segunda baraja y se extrae al azar una carta que resulta ser el dos deoros. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta extraída fuera una espada?



$$P(\text{espada de la 1.ª baraja} / \text{salió el dos deoros en la 2.ª baraja}) = \frac{\frac{10}{1640}}{\frac{10}{1640} + \frac{2}{1640} + \frac{29}{1640}} = \frac{10}{41} = 0,2439$$

- 13.23. (PAU) En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es de 0,1. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma suene es de 0,95. La probabilidad de que funcione la alarma sin que haya incidente es de 0,03. Se sabe que ha funcionado la alarma. Halla la probabilidad de que no haya habido incidente.



$$P(\text{sin incidente} / \text{sonó la alarma}) = \frac{0,027}{0,095 + 0,027} = 0,2213$$

- 13.24. Un profesor decide realizar un sorteo entre sus 25 alumnos. Para ello escribe un número entero comprendido entre 1 y 25 en un papel. Los alumnos por orden, van diciendo un número entre 1 y 25 (un número dicho no puede volver a ser elegido por otro alumno). Realiza un estudio para saber si este método es justo o no. ¿Tienen todos los alumnos igual probabilidad de ganar el sorteo?

Consideramos el suceso A_i = "acierta el alumno que ocupa el lugar i "

$$P(A_1) = \frac{1}{25}$$

$$P(A_2) = p(\bar{A}_1) \cdot p(A_2/\bar{A}_1) = \frac{24}{25} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{25}$$

$$P(A_3) = p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2/\bar{A}_1) \cdot p(A_3/\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{25}$$

En vista de los resultados obtenidos para los tres primeros alumnos, podemos concluir que todos los alumnos tienen la misma probabilidad de acertar el número; por tanto, el método elegido por el profesor es justo.

EJERCICIOS

Variaciones, permutaciones y combinaciones

- 13.25. Un experimento consiste en la extracción al azar de una carta de una baraja española, el lanzamiento de una moneda de 1 euro y la extracción de una bola de una urna que contiene 12 bolas numeradas del 1 al 12. ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral producto?

El número de elementos muestrales del experimento extraer una carta de una baraja española es 40.

El número de elementos muestrales del experimento lanzar una moneda de 1 € es 2.

El número de elementos muestrales del experimento extraer una bola de una urna que contiene 12 bolas numeradas del 1 al 12 es 12.

Por tanto, el número de elementos del espacio muestral producto será:

$$40 \cdot 2 \cdot 12 = 960 \text{ elementos}$$

- 13.26. En la Lotería Primitiva hay que acertar 6 números entre los 49 del boleto. ¿Cuántos boletos diferentes se pueden rellenar?

Como no influye el orden, se trata de las combinaciones de 49 números tomados de 6 en 6:

$$C_{49,6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13\,983\,816 \text{ boletos diferentes}$$

- 13.27. El pleno al 15 del Quinielón consiste en acertar con un 1, X o 2 los 15 partidos de la Liga de Fútbol Profesional que figuran en el boleto. ¿Cuántas quinielas diferentes puede haber?

Hay que distribuir en las 15 casillas de la quiniela los símbolos 1, X, 2. Como influye el orden y puede haber repetición, se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 15 en 15:

$$VR_{3,15} = 14\,348\,907 \text{ quinielas diferentes}$$

- 13.28. Unos códigos cifrados en un cierto idioma tienen que estar formados por cuatro consonantes seguidas de dos vocales y a continuación seis dígitos. Tanto las consonantes como las vocales y los dígitos se pueden repetir. ¿Cuántos códigos distintos se podrán formar teniendo en cuenta que el alfabeto de ese idioma tiene 21 consonantes y 5 vocales?

Un código cualquiera puede ser XPMQAE123456.

Aplicando el principio de multiplicación resulta:

$$21^4 \cdot 5^2 \cdot 10^6 = 4\,862\,025\,000\,000 \text{ códigos diferentes}$$

- 13.29. En el salón del automóvil, una determinada marca tiene un espacio para exponer 7 coches diferentes alineados de los 12 vehículos que ha llevado para exponer. Si deciden variar todos los días la exposición, con el fin de hacerla más atractiva, ¿cuántos días necesitarán para poder efectuar todas las combinaciones posibles?

Influye el orden, no intervienen todos y no se pueden repetir; por tanto, necesitarán:

$$V_{12,7} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,991\,680 \text{ días}$$

- 13.30. Los actores de una obra de teatro son 5 mujeres y 7 hombres. Al acabar la función salen a saludar al público, que les dedica una fuerte ovación. ¿De cuántas formas se podrán ordenar en el escenario en los siguientes casos?

a) Salen todos en una fila.

b) Salen en dos filas: las mujeres en la delantera y los hombres en la trasera.

a) $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$ formas diferentes

b) Las mujeres se pueden ordenar de $P_5 = 5! = 120$ formas diferentes.

Los hombres pueden colocarse de $P_7 = 7! = 5040$ formas diferentes.

En total, los actores pueden situarse de $120 \cdot 5040 = 604\,800$ formas diferentes.

- 13.31. En un supermercado se preparan bandejas con un surtido de 6 piezas de frutas diferentes. Si en total se dispone de 8 tipos de fruta, ¿cuántas bandejas diferentes se podrán ofrecer a los clientes?

Como no influye el orden, se trata de combinaciones de 8 elementos tomadas de 6 en 6:

$$C_{8,6} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$$

- 13.32. ¿Cuántas rectas distintas determinan 7 puntos de un plano, suponiendo que no hay más de 2 alineados?

Una recta queda determinada por dos puntos; por tanto, los siete puntos determinan:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$$

Sucesos y operaciones con sucesos

- 13.33. En el experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española, consideremos los sucesos:

A = "salir oro".

B = "salir as".

C = "salir rey de copas o as de espadas".

Interpreta los siguientes sucesos.

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cup C$

d) $A \cap B$

e) $A \cap C$

f) $B \cap C$

a) $A \cup B$ = "salir oro o as". Son las 10 cartas de los oros, el as de bastos, el as de copas y el as de espadas.

b) $A \cup C$ = "salir oro o rey de copas o as de espadas". Son las 10 cartas de oros, el rey de copas y el as de espadas.

c) $B \cup C$ = "salir as o rey de copas o as de espadas". Son los 4 ases, el rey de copas y el as de espadas.

d) $A \cap B$ = "salir oro y as" = "salir el as de oros".

e) $A \cap C$ = "salir oro y rey de copas o as de espadas" = \emptyset .

f) $B \cap C$ = "salir as y rey de copas o as de espadas" = "salir el as de espadas".

13.34. En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae una bola al azar y se anota el número.

a) Forma los sucesos:

A = "salir número impar".

C = "salir número primo".

B = "salir número par".

D = "salir número menor o igual a 5".

b) Enuncia los sucesos contrarios de los sucesos anteriores.

c) Describe los siguientes sucesos.

$A \cup B$ $A \cup C$ $A \cup D$ $(A \cap C) \cup B$

$D \cap A$ $B \cap C$ $B \cap D$ $(A \cup C) \cap B$

d) Comprueba con los sucesos A y D las leyes de Morgan.

a) A = "salir número impar" = {1, 3, 5, 7, 9}

C = "salir número primo" = {2, 3, 5, 7}

B = "salir número par" = {2, 4, 6, 8, 10}

D = "salir número menor o igual a 5" = {1, 2, 3, 4, 5}

b) \bar{A} = {2, 4, 6, 8, 10}

\bar{B} = {1, 3, 5, 7, 9}

\bar{C} = {1, 4, 6, 8, 9, 10}

\bar{D} = {6, 7, 8, 9, 10}

c) $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} = E

$A \cup C$ = {1, 2, 3, 5, 7, 9}

$A \cup D$ = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}

$(A \cap C) \cup B$ = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}

$D \cap A$ = {1, 3, 5}

$B \cap C$ = {2}

$B \cap D$ = {2, 4}

$(A \cup C) \cap B$ = {2}

d) $A \cup D$ = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}

$\overline{A \cup D}$ = {6, 8, 10}

$\bar{A} \cap \bar{D}$ = {6, 8, 10}

$A \cap D$ = {1, 3, 5}

$\overline{A \cap D}$ = {2, 4, 6, 7, 8, 9, 10}

$\bar{A} \cup \bar{D}$ = {2, 4, 6, 7, 8, 9, 10}

Concepto de probabilidad

13.35. (PAU) En una urna hay 7 bolas rojas, 5 blancas y 9 azules. Se extrae una de ellas al azar. Halla la probabilidad de que la bola:

a) Sea roja.

b) Sea azul.

c) No sea blanca.

d) No sea ni roja ni blanca.

e) Sea roja o blanca.

f) Sea azul o blanca.

a) $P(R) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

b) $P(A) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

c) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

d) $P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \frac{7}{21} + \frac{5}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

e) $P(\bar{R} \cap \bar{B}) = P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 1 - \frac{12}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{9}{21} + \frac{5}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

13.36. (PAU) En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15. Se realiza un experimento que consiste en la extracción de una bola de la urna al azar, se anota su número y se reintegra a la urna. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

- a) Que sea un número par.
- b) Que sea un número primo.
- c) Que sea un número menor que 100.
- d) Que sea un número mayor que 100.
- e) Que sea un número múltiplo de 11.
- f) Que sea un número mayor o igual a 2 y menor que 7.

a) $A = \text{"salir par"} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \Rightarrow P(A) = \frac{7}{15}$

b) $B = \text{"salir número primo"} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

c) $E = \text{"salir número menor que 100"} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \Rightarrow P(E) = 1$

d) $D = \text{"salir número mayor que 100"} = \emptyset \Rightarrow P(D) = 0$

e) $F = \text{"salir número múltiplo de 11"} = \{11\} \Rightarrow P(F) = \frac{1}{15}$

f) $G = \text{"salir número mayor o igual a 2 y menor que 7"} = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(G) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

13.37. (PAU) Se lanzan dos dados cúbicos distinguibles con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

- a) Obtener el 6 doble.
- b) Obtener al menos un 6.
- c) Obtener las dos caras iguales.
- d) Obtener suma 7.
- e) Obtener que la suma de los puntos de las caras sea múltiplo de 4.

a) $A = \text{"obtener seis doble"} = \{(6, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{36}$

b) $B = \text{"obtener al menos un 6"} = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{11}{36}$

c) $C = \text{"obtener las dos caras iguales"} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d) $D = \text{"obtener suma 7"} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

e) $F = \text{"obtener suma múltiplo de 4"} = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)\} \Rightarrow P(F) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

13.38. La probabilidad de que tenga lugar el contrario de un suceso A es de $\frac{2}{3}$, de un suceso B es de $\frac{1}{2}$, y de que tengan lugar a la vez los sucesos A y B es de $\frac{3}{8}$. Determina la probabilidad de que no se verifique ninguno de los dos sucesos.

Los datos que da el problema son:

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{3} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

Hay que calcular la probabilidad del suceso $\bar{A} \cap \bar{B}$, que es igual, aplicando las leyes de Morgan, al suceso $\overline{A \cup B}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{8 + 12 - 9}{24} = \frac{11}{24}$$

$$\text{Por tanto, } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{24} = \frac{13}{24}$$

13.39. (PAU) De 100 personas que fueron consultadas sobre sus preferencias respecto de tres marcas de coches, A , B y C , 50 se decantaron por A ; 40, por B , y 30, por C . Además, 25 personas optaron por A y B ; 15, por A y C , y 12, por B y C . Por último, tan solo 5 personas mostraron preferencias por las tres marcas. El resto no sabe o no contesta. Elegida una persona al azar, halla las siguientes probabilidades.

- Que prefiera la marca A .
- Que prefiera la marca B .
- Que prefiera las marcas A y B .
- Que prefiera las marcas B y C .
- Que prefiera la marca A y no la C .
- Que prefiera la marca B y no la C .
- Que no prefiera ni la marca A ni la B .

$$\text{a) } P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$\text{c) } P(A \cap B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\text{d) } P(B \cap C) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$\text{e) } P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = \frac{50}{100} - \frac{15}{100} = \frac{35}{100}$$

$$\text{f) } P(B \cap \bar{C}) = P(B) - P(B \cap C) = \frac{40}{100} - \frac{12}{100} = \frac{28}{100}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{50 + 40 - 25}{100} = \\ &= \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

13.40. (PAU) ¿Cuál es la probabilidad de que en un sorteo ordinario de lotería toque un número capicúa comprendido entre el 5000 y el 7000?

Nota: En los sorteos ordinarios de lotería hay 5 bombos con los números del 0 al 9.

Los números capicúas comprendidos entre 5000 y 7000 son de la forma 5aba5 y 6cdc6; por consiguiente, son tantos como el doble de las ordenaciones de la forma ab , es decir:

$$2 \cdot VR_{10,2} = 2 \cdot 10^2 = 200$$

$$P(\text{capicúa comprendido entre 5000 y 7000}) = \frac{200}{2000} = 0,1$$

Probabilidad compuesta. Sucesos independientes

13.41. (PAU) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{3}{5}$. Calcula razonadamente para qué valor de $P(A \cup B)$ los sucesos A y B son independientes.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ y, por tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.

Si $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$, los sucesos A y B son independientes.

13.42. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = \frac{2}{9} \quad P(B) = \frac{4}{9} \quad P(A \cup B) = \frac{5}{9}$$

a) Calcula $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

b) Estudia la independencia de A y de B .

c) ¿Son independientes los sucesos contrarios de A y de B ?

$$\text{a) } P(A \cap B) = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = \frac{1}{9} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

b) No, ya que $P(A/B) \neq P(A)$

$$\text{c) } P(\bar{A}) = \frac{7}{9} \quad P(\bar{B}) = \frac{5}{9} \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{4}{9}. \text{ No, ya que } P(\bar{A} \cap \bar{B}) \neq P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

13.43. La probabilidad del suceso A es de $\frac{2}{3}$, la del suceso B es de $\frac{3}{4}$, y la de su intersección es de $\frac{5}{8}$. Halla la probabilidad de que:

a) Se verifique alguno de los dos sucesos.

b) No ocurra B .

c) No se verifique ni A ni B .

d) Ocurra A si se ha verificado B .

$$\text{a) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{19}{24}$$

$$\text{b) } P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\text{d) } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$$

13.44. (PAU) Tenemos 5 pares distintos de guantes. Entremezclamos bien los 10 guantes. Elegimos 2 de ellos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos formen pareja?

Hay 10 guantes, cualquiera que sea el que cojamos primero nos sirve, pero para que el siguiente forme pareja, solo hay una de nueve posibles; por tanto, la probabilidad pedida es $P = 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$.

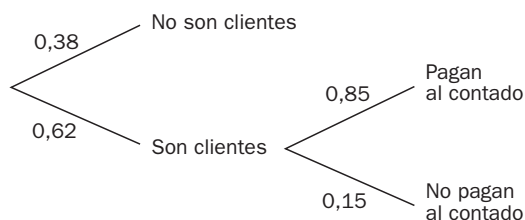
13.45. (PAU) En una urna hay 6 bolas blancas y 3 negras. Se extraen sucesivamente 3 bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que alguna de ellas sea negra.

El suceso contrario de que alguna sea negra es que las tres sean blancas.

$$P(BBB) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{21}$$

$$P(\text{alguna negra}) = 1 - P(BBB) = \frac{16}{21}$$

13.46. (PAU) El gerente de unos grandes almacenes ha comprobado que un 38% de las familias que residen en una determinada ciudad no son clientes habituales y que un 85% de las familias de esa ciudad que habitualmente son clientes pagan al contado el importe de sus compras. Determina la probabilidad de que, seleccionada al azar una familia en esa ciudad, sea cliente y pague al contado el importe de sus compras. Justifica la respuesta.



$$P(\text{sea cliente y pague al contado}) = 0,62 \cdot 0,85 = 0,527.$$

13.47. Entre los 200 alumnos de Bachillerato de un instituto se ha realizado una encuesta cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

	Tienen ordenador	No tienen ordenador
1.º curso	85	35
2.º curso	75	45

Calcula la probabilidad de que un alumno seleccionado al azar:

- Tenga ordenador.
- Sea de 1.º de Bachillerato y tenga ordenador.
- Tenga ordenador y sea de 2.º de Bachillerato.

$$a) P(\text{tenga ordenador}) = \frac{85 + 75}{240} = \frac{160}{240} = \frac{2}{3}$$

$$b) P(\text{sea de 1.º de Bachillerato y tenga ordenador}) = \frac{85}{240} = \frac{17}{48}$$

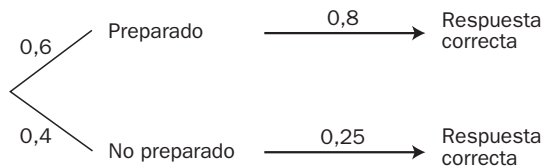
$$c) P(\text{tenga ordenador y sea de 2.º de Bachillerato}) = \frac{75}{240} = \frac{15}{48}$$

13.48. Se eligen al azar 2 tarjetas de un total de 9. Cada una lleva escrito un número del 1 al 9. Se sabe que la suma de los dígitos de las tarjetas elegidas es par. Calcula la probabilidad de que las tarjetas elegidas lleven escritos números impares.

$$P(\text{impar-impar} / \text{suma par}) = \frac{P(\text{impar} - \text{impar} \cap \text{suma par})}{P(\text{suma par})} = \frac{P(\text{impar} - \text{impar})}{P(\text{suma par})} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{32}{72}} = \frac{5}{8}$$

Probabilidad total

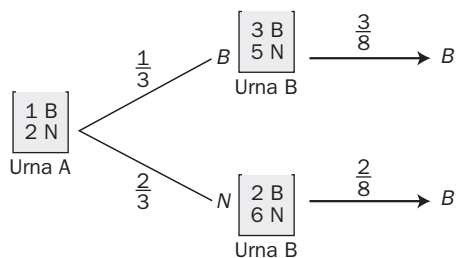
- 13.49. (PAU) Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por 100 preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas (y solo una es correcta). Sesenta de las preguntas corresponden a la parte del programa que el estudiante ha preparado y en las que tiene una probabilidad del 80% de contestar acertadamente. En las preguntas restantes señalará al azar una de las cuatro respuestas. Si se elige al azar una de las preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que su respuesta sea la correcta?



Es una aplicación del teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{correcta}) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,25 = 0,58$$

- 13.50. (PAU) En la urna A hay una bola blanca y dos negras. En la urna B hay dos blancas y cinco negras. Se elige al azar una bola de la urna A y se pasa a la B. Se extrae a continuación una bola de la urna B. Calcula la probabilidad de que sea blanca.



$$P(\text{blanca}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{24} = 0,292$$

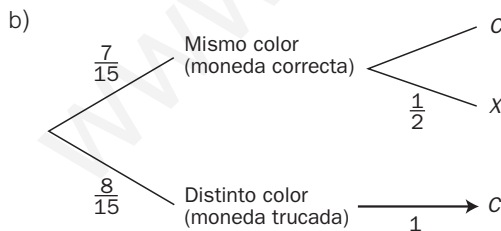
- 13.51. (PAU) Disponemos de dos monedas: una correcta y otra con dos caras, y de una urna con diez bolas: cuatro blancas y seis negras. Sacamos dos bolas de la urna; si son del mismo color, elegimos la moneda correcta y la lanzamos al aire. En otro caso, elegimos la incorrecta y la lanzamos al aire. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Que las dos bolas sean del mismo color.

b) Que se obtenga cara en el lanzamiento de la moneda.

c) Si el resultado del lanzamiento de la moneda ha sido cruz, que las dos bolas elegidas sean de distinto color.

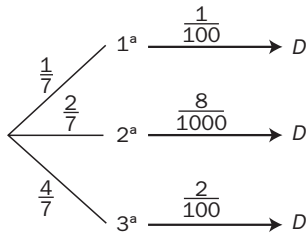
$$a) P(\text{del mismo color}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$



$$P(\text{cara}) = \frac{7}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{15} = \frac{23}{30}$$

$$c) P(\text{cruz} / \text{distinto color}) = 0$$

13.52. (PAU) El volumen de producción de tres plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 en la segunda y 2000 en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1%, 0,8% y 2%, respectivamente, calcula la probabilidad de que al seleccionar al azar una unidad, esta sea defectuosa.



$$P(D) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{100} + \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{1000} + \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{100} = \frac{53}{3500}$$

13.53. (PAU) De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halla la probabilidad de que:

- a) Los dos acierten.
- b) Uno acierte y el otro no.
- c) Ninguno de los dos acierte.
- d) Alguno acierte.

a) $P(\text{los dos acierten}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

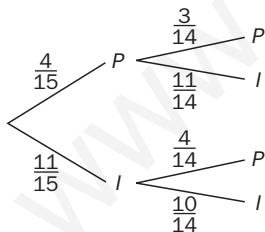
b) $P(\text{uno acierte y el otro no}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P(\text{ninguno acierte}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P(\text{alguno acierte}) = 1 - P(\text{ninguno acierte}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

13.54. (PAU) En una bolsa hay 5 bolas con el número 1, 4 bolas con el número 2 y 6 bolas con el número 3. Se extraen dos bolas, una a una, sin reemplazamiento. Halla la probabilidad de que:

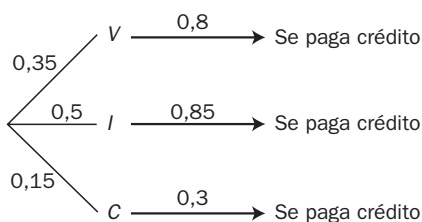
- a) La segunda bola tenga número impar.
- b) Las dos bolas tengan números pares.



a) $P(\text{segunda impar}) = \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} + \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{154}{210} = \frac{11}{15}$

b) $P(\text{las dos son pares}) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} = \frac{12}{210} = \frac{2}{35}$

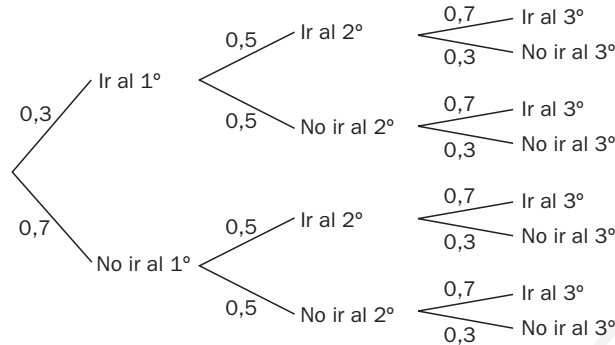
13.55. (PAU) El 35% de los créditos de un banco son para vivienda; el 50%, para industrias, y el 15%, para consumo diverso. Resultan fallidos el 20% de los créditos para vivienda, el 15% de los créditos para industrias y el 70% de los créditos para consumo. Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.



$$P(\text{de que se pague el crédito}) = 0,35 \cdot 0,8 + 0,50 \cdot 0,85 + 0,15 \cdot 0,3 = 0,75$$

13.56. (PAU) En una determinada ciudad hay tres lugares de diversión a los que suele ir un grupo de amigos. Las probabilidades de que vayan al primero, segundo o tercero son, respectivamente, de 0,3, 0,5 y 0,7. Halla la probabilidad de que el grupo de amigos vaya:

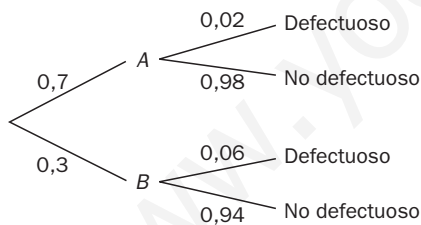
- Solamente a uno de los lugares.
- Únicamente a dos de los lugares.
- A los tres lugares.



- $P[(1.^\circ \text{ y no } 2.^\circ \text{ y no } 3.^\circ) \cup (\text{no } 1.^\circ \text{ y } 2.^\circ \text{ y no } 3.^\circ) \cup (\text{no } 1.^\circ \text{ y no } 2.^\circ \text{ y } 3.^\circ)] = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,395$
- $P[(1.^\circ \text{ y } 2.^\circ \text{ y no } 3.^\circ) \cup (1.^\circ \text{ y } 3.^\circ \text{ y no } 2.^\circ) \cup (2.^\circ \text{ y } 3.^\circ \text{ y no } 1.^\circ)] = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,395$
- $P(1.^\circ \text{ y } 2.^\circ \text{ y } 3.^\circ) = 0,3 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,105$

Teorema de Bayes

13.57. (PAU) Las probabilidades de que cierto artículo esté fabricado por las máquinas A y B son de 0,7 y 0,3, respectivamente. La máquina A produce artículos defectuosos con probabilidad de 0,02, y la B, con probabilidad de 0,06. Se observa un artículo y resulta ser defectuoso. Halla la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina A.



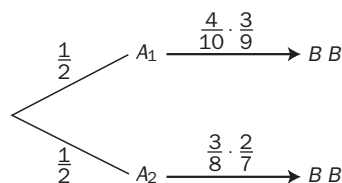
$$P(\text{fabricado por A} / \text{es defectuoso}) = \frac{0,7 \cdot 0,02}{0,7 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,06} = 0,4375$$

13.58. (PAU) Tenemos dos bolsas, A₁ y A₂, con la siguiente composición.

Bolsa A₁: 4 bolas blancas, 6 bolas rojas.

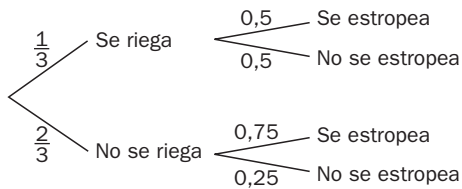
Bolsa A₂: 3 bolas blancas, 5 bolas rojas.

Se elige una bolsa al azar y se sacan 2 bolas de ella. Si de las 2 bolas extraídas ninguna es roja, halla la probabilidad de que la bolsa escogida sea la A₁.



$$P(\text{bolsa } A_1 / \text{ninguna bola es roja}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}} = 0,554$$

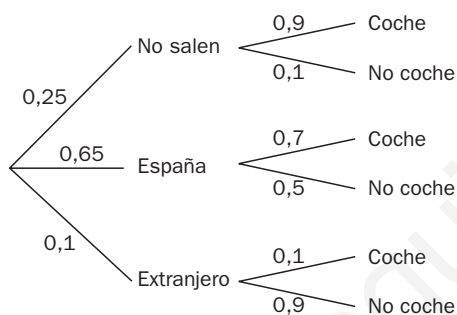
13.59. (PAU) Una persona cuida de su jardín, pero es bastante distraída y a veces se olvida de regarlo. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es de $\frac{2}{3}$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0,25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?



$$P(\text{no se riega} / \text{se estropea}) = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,75}{\frac{1}{3} \cdot 0,5 + \frac{2}{3} \cdot 0,75} = \frac{3}{4}$$

13.60. (PAU) El 25% de las familias de cierta comunidad autónoma española no sale fuera de la misma durante las vacaciones de verano. El 65% veranea por el resto de España, y el 10% restante se va al extranjero. De los que se quedan en su comunidad, solo un 10% no utiliza el coche en sus desplazamientos. Esta cantidad aumenta al 30% entre los que salen por el resto de España, y al 90% entre los que viajan al extranjero.

- Halla el porcentaje de familias de esa comunidad que utiliza el coche en sus desplazamientos de vacaciones de verano.
- Una familia no usa el coche en sus vacaciones de verano. ¿Cuál es la probabilidad de que salga de su comunidad moviéndose por el resto de España?

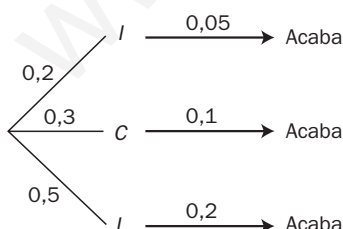


a) $P(\text{utilizar coche}) = 0,25 \cdot 0,9 + 0,65 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,69$
El 69% de familias de esa comunidad utiliza el coche.

b) $P(\text{resto de España} / \text{no usa coche}) = \frac{0,65 \cdot 0,3}{1 - 0,69} = 0,629$

13.61. (PAU) En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, ciencias y letras acaban la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería; el 30%, ciencias, y el 50%, letras. Elegido un estudiante al azar, se pide:

- Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.
- Si nos dice que ha acabado la carrera, probabilidad de que sea de ingeniería.



a) $P(\text{acabar ingeniería}) = 0,2 \cdot 0,05 = 0,01$

b) $P(\text{estudiar ingeniería} / \text{acabó}) = \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2} = 0,0714$

PROBLEMAS

13.62. (PAU) Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es de 0,6; la de que pase la segunda es de 0,8, y la de que pase ambas es de 0,5. Halla las siguientes probabilidades.

- a) Que pase al menos una prueba.
- b) Que no pase ninguna prueba.
- c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?
- d) Que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

Consideremos los siguientes sucesos:

$$A = \text{"pasar la primera prueba"} \Rightarrow P(A) = 0,6$$

$$B = \text{"pasar la segunda prueba"} \Rightarrow P(B) = 0,8$$

$$A \cap B = \text{"pasar las dos pruebas"} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,5$$

$$a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9$$

$$b) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$c) \text{ Se comparan } P(A) \text{ y } P(A/B); \quad P(A) = 0,6; \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,8} = \frac{5}{8}$$

Como $P(A) \neq P(A/B)$, los sucesos A y B son dependientes.

d) Como $B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$, tomando probabilidades resulta:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}); \quad 0,8 = 0,5 + P(B \cap \bar{A}) \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0,3$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,3}{1 - 0,6} = 0,75$$

13.63. (PAU) En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto, y el 10% practica ambos deportes. Además hay un 60% que no juega al fútbol. Halla la probabilidad de que, escogido al azar un alumno de la clase:

- a) Juegue sólo al fútbol.
- b) Juegue sólo al baloncesto.
- c) Practique uno solo de los deportes.
- d) No juegue ni al fútbol ni al baloncesto.

Consideramos los sucesos:

$$F = \text{"juega al fútbol"}$$

$$B = \text{"juega al baloncesto"}$$

$$P(\bar{F}) = 0,6 \Rightarrow P(F) = 0,4$$

$$P(F \cup B) = 0,6 \Rightarrow P(F \cap B) = 0,1$$

$$P(B) = P(F \cup B) + P(F \cap B) - P(F) = 0,6 + 0,1 - 0,4 = 0,3$$

$$a) P(F \cap \bar{B}) = P(F) - P(F \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$

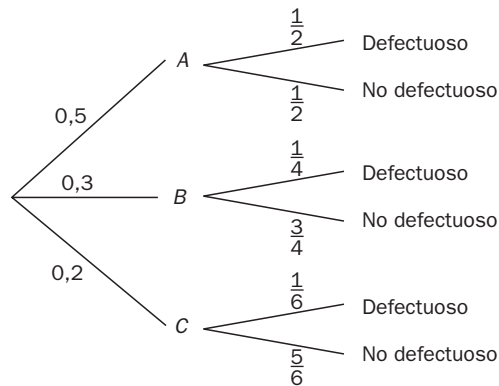
$$b) P(B \cap \bar{F}) = P(B) - P(F \cap B) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

$$c) P(F \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{F}) = 0,3 + 0,2 = 0,5$$

$$d) P(\bar{F} \cap \bar{B}) = P(\overline{F \cup B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

13.64. (PAU) Una fábrica tiene tres cadenas de producción: A, B y C. La cadena A fabrica el 50% del total de coches producidos; la B, el 30%, y la C, el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es de $\frac{1}{2}$ en la cadena A, de $\frac{1}{4}$ en la B y de $\frac{1}{6}$ en la C. Halla:

- La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido producido por la cadena A.
- La probabilidad de que un coche sea defectuoso.
- Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena C?



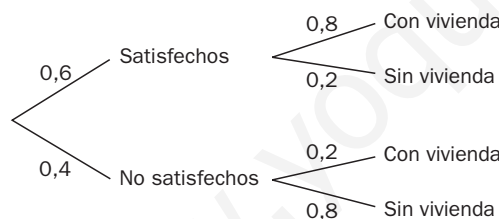
a) $P(\text{defectuoso y producido por A}) = 0,5 \cdot \frac{1}{2} = 0,25$

b) $P(\text{defectuoso}) = 0,5 \cdot \frac{1}{2} + 0,3 \cdot \frac{1}{4} + 0,2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{43}{120}$

c) $P(\text{producido por C} \mid \text{no es defectuoso}) = \frac{0,2 \cdot \frac{5}{6}}{0,2 \cdot \frac{5}{6} + 0,3 \cdot \frac{3}{4} + 0,5 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{20}{77}$

13.65. (PAU) El 60% de los habitantes de una ciudad están satisfechos con su situación económica, y el 80% de ellos tienen vivienda propia. De los no satisfechos con su situación económica, solo el 20% tienen vivienda propia.

- ¿Qué tanto por ciento de habitantes tiene vivienda propia?
- ¿Qué tanto por ciento de los habitantes que tienen vivienda propia están satisfechos con su situación económica?
- ¿Qué tanto por ciento de los habitantes sin vivienda propia están satisfechos con su situación económica?



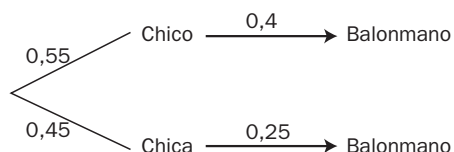
a) $P(\text{con vivienda}) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,56$.
El 56% de los habitantes tiene vivienda.

b) $P(\text{satisfechos} \mid \text{con vivienda}) = \frac{0,6 \cdot 0,8}{0,56} = 0,857$.
El 85,7% de los habitantes.

c) $P(\text{satisfechos} \mid \text{sin vivienda}) = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,8} = 0,273$. El 27,3% de los habitantes.

13.66. (PAU) En una clase de primero de Bachillerato compuesta por el 55% de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40% de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si se elige un alumno al azar de la clase:

- ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica?
- Si resulta que no practica balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?



a) $P(\text{balonmano}) = 0,55 \cdot 0,4 + 0,45 \cdot 0,25 = 0,3325$

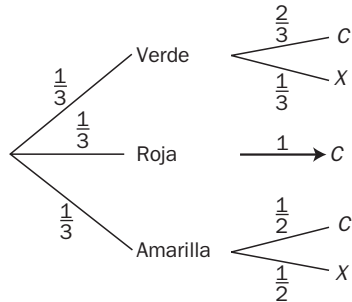
b) $P(\text{balonmano y chica}) = 0,45 \cdot 0,25 = 0,1125$

c) $P(\text{chica} \mid \text{balonmano}) = \frac{0,1125}{0,3325} = 0,338$

13.67. (PAU) Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada caja hay una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de que salga cruz, la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcula razonadamente:

a) La probabilidad de que salga cara.

b) La probabilidad de que, sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.



$$a) P(\text{salga cara}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{18} = 0,722$$

$$b) P(\text{caja roja} / \text{cara}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{13}{18}} = \frac{6}{13} = 0,462$$

13.68. (PAU) Un dado con las caras numeradas del 1 al 6 está trucado de modo que la probabilidad de obtener un número es directamente proporcional a dicho número.

a) Halla la probabilidad de que salga 3 si se sabe que salió impar.

b) Calcula la probabilidad de que salga par si se sabe que salió mayor que 3.

$$P(1) = x; \quad P(2) = 2x; \quad P(3) = 3x; \quad P(4) = 4x; \quad P(5) = 5x; \quad P(6) = 6x$$

$$P(E) = 1 = x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x; \quad 1 = 21x; \quad x = \frac{1}{21}$$

$$a) P(3 / \text{salió impar}) = \frac{P(3)}{P(1, 3, 5)} = \frac{\frac{3}{21}}{\frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b) P(\text{par} / \text{mayor que 3}) = \frac{P(4, 6)}{P(4, 5, 6)} = \frac{\frac{4}{21} + \frac{6}{21}}{\frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

PROFUNDIZACIÓN

13.69. (PAU) Sean A , B y C tres sucesos independientes tales que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,8$ y $P(C) = 0,7$. Halla las probabilidades de los sucesos siguientes.

$$A \cup B, A \cup C, A \cup B \cup C$$

Por ser los sucesos A , B y C independientes entre sí, se verifica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,112$$

Las probabilidades pedidas son:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,8 - 0,16 = 0,84$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0,2 + 0,7 - 0,14 = 0,76$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,2 + 0,8 + 0,7 - 0,16 - 0,14 - 0,56 + 0,112 = 0,952$$

13.70. (PAU) Si los sucesos A y B son independientes y compatibles, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) $P(A \cup B/B) = 1$

b) $P(B/\bar{A}) = P(B)$

a) $P(A \cup B/B) = \frac{P[(A \cup B) \cap B]}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$. Por tanto, la primera afirmación es cierta.

b) Si A y B son independientes, veamos que también son independientes \bar{A} y B .

Expresamos B como $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$.

Por ser $B \cap A$ y $B \cap \bar{A}$ incompatibles: $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

Por otro lado, por ser A y B independientes y por definición de probabilidad condicionada:

$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A)$ $P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})$

Por tanto: $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B) \cdot P(A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})$

Despejando, aplicando la probabilidad del suceso contrario y operando en la expresión anterior se obtiene:

$P(B) - P(B) \cdot P(A) = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) \Rightarrow P(B) [1 - P(A)] = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) \cdot P(\bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) \Rightarrow P(B) = P(B/\bar{A})$

Luego \bar{A} y B son independientes. Por tanto, la segunda afirmación es cierta.

13.71. (PAU) De dos sucesos A y B se sabe que son independientes, que la probabilidad de que ocurra A es de $\frac{2}{3}$, y de que ocurra A pero no B es de $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra B ? ¿Y la de que ocurra alguno de los dos?

En el ejercicio anterior se ha visto que si A y B son independientes, también son independientes A y \bar{B} .

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

13.72. (PAU) La ruleta de un casino consta de 40 casillas, numeradas del 1 al 40. Los números acabados en 1, 2, 3, 4 ó 5 son rojos, y el resto, negros.

Se consideran los sucesos siguientes:

A = "el resultado es un número entre 1 y 10".

B = "el resultado es un número par".

C = "el resultado es un número rojo".

a) Halla la probabilidad $P(C - A)$.

b) Halla la probabilidad de que el número sea de la primera decena y rojo.

c) ¿Son independientes los sucesos A y B ? ¿Y los sucesos A y C ?

a) $P(C - A) = P(C) - P(A \cap C) = \frac{20}{40} - \frac{5}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

b) $P(A \cap C) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

c) $P(A \cap B) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$ $P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{20}{40} = \frac{1}{8}$. A y B son independientes.

$P(A \cap C) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$ $P(A) \cdot P(C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{20}{40} = \frac{1}{8}$. A y C son independientes.

10.73. (PAU) a) Halla la probabilidad de obtener al menos un seis doble en n tiradas de dos dados.

b) ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que la probabilidad anterior sea de $\frac{1}{2}$?

a) Sea A_i el suceso "sacar 6 doble en la tirada i -ésima".

La probabilidad pedida será:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \dots \cup \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = \\ &= 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) P(\overline{A_3}) \dots P(\overline{A_n}) = \quad \text{ya que los sucesos son independientes.} \\ &= 1 - [P(\overline{A_1})]^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \quad \text{ya que todos los sucesos tienen la misma probabilidad.} \end{aligned}$$

$$P(\text{al menos un 6 doble en } n \text{ tiradas de dos dados}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

b) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \left(\frac{35}{36}\right)^n$. Tomando logaritmos resulta:

$$\log 2 = n (\log 36 - \log 35) \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 25 \text{ partidas}$$

13.74. (PAU) Sean A y B dos sucesos cualesquiera de probabilidad no nula e independientes. Justifica si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) $P(\overline{A}|\overline{B}) = P(A)$

b) $P(\overline{B}|A) = P(\overline{B})$

c) $P(A \cup \overline{A}) = 0,5$

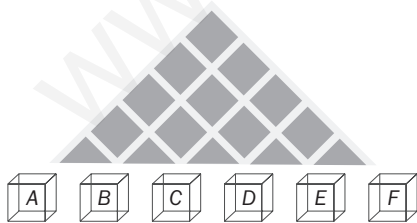
Si A y B son independientes, también lo son \overline{A} y \overline{B} , así como A y \overline{B} . Aplicamos ahora la definición de probabilidad condicionada.

a) $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})}{P(\overline{B})} = P(\overline{A}) = P(A)$. Y esto solo se verifica cuando $P(A) = 0,5$.

b) $P(\overline{B}|A) = P(\overline{B})$. Cierta, por ser A y \overline{B} independientes.

c) $P(A \cup \overline{A}) = P(E) = 1 \neq 0,5$. Luego esta igualdad es falsa.

13.75. (PAU) Se deja caer una bola por el orificio de entrada del aparato de la figura. En cada bifurcación, la bola tiene igual probabilidad de ir a la izquierda que de ir a la derecha. Halla la probabilidad de que la bola llegue a las casillas A, B, C, D, E y F .



El número de caminos que llevan a A, B, C, D, E y F viene dado por los números combinatorios de la quinta fila del triángulo de Pascal.

$$P(\text{llegar a } A) = \binom{5}{0} P(\text{un camino que lleva a } A) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(\text{llegar a } B) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} \quad P(\text{llegar a } C) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

$$P(\text{llegar a } D) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} \quad P(\text{llegar a } E) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

$$P(\text{llegar a } F) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$