REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Esta Unidad pretende ser una aplicación práctica de todo lo aprendido hasta ahora en el bloque de Análisis. En ella nos centraremos en las funciones polinómicas y racionales. Asimismo, usaremos el cálculo de límites como instrumento para conocer las posibles asíntotas de una función, así como su continuidad. Incluiremos también el estudio de la derivada para obtener los extremos relativos y la monotonía de una función. A partir de la segunda derivada obtendremos los puntos de inflexión y estudiaremos su curvatura.

Por esta razón la representación gráfica de funciones se considera una de las aplicaciones del cálculo de límites y de las derivadas más utilizada en las ciencias sociales y, en correspondencia, es uno de los temas de ejercicios más frecuentes en las PAU.

08

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

- **Información extraída de la función**
  - Dominio
  - Simetría
  - Continuidad
  - Cortes con los ejes
  - Intervalos de signo constante
  - Asíntotas
- **Información extraída de la primera derivada**
  - Extremos relativos
  - Monotonía
- **Información extraída de la segunda derivada**
  - Puntos de inflexión
  - Curvatura

8.1 Información extraída de la función

A. Dominio

El **dominio** de una función real de variable real dom f, es el conjunto de valores de la variable independiente x para los que está definida la función.

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbf{R} \;/\; f(x) \in \mathbf{R}\}$$

A continuación analizaremos el dominio de algunos tipos de funciones:

Función	**Ejemplos**
Polinómica	
dom $f = \mathbf{R}$	• El dominio de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \sqrt{5}$ es **R.**
Racional	
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ $\Rightarrow$ dom $f = \mathbf{R} - \{x \in \mathbf{R} \;/\; q(x) = 0\}$	• Si $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$ los valores que anulan el denominador son las soluciones de la ecuación: $x^2 - 5x + 6 = 0$ es decir: $x = 2$ y $x = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ dom $f = \mathbf{R} - \{2, 3\} = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$ • Si $f(x) = \frac{x}{x(x+5)} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ dom $f = \mathbf{R} - \{-5, 0\} = (-\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (0, \infty)$
Exponencial	
$f(x) = a^{g(x)}$ $a > 0$, $a \neq 1$ $\Rightarrow$ dom $f = \mathbf{R}$.	• Si $f(x) = e^{2x+3} \Rightarrow$ dom $f = \mathbf{R}$
Logarítmica	
$\boldsymbol{f(x) = \log_a(g(x))}$ $\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1}$ $\Rightarrow$ dom $f = \{x \in \mathbf{R} \;/\; g(x) > 0\}$.	• Si $f(x) = \ln(4 - x^2)$ $\Rightarrow$ dom $f = (-2, 2)$ que son las soluciones de $4 - x^2 > 0$.
Irracional	
$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ — Si n es par: dom $f = \{x \in \mathbf{R} \;/\; g(x) \geq 0\}$ — Si n es impar: dom $f = \mathbf{R}$	• Si $f(x) = \sqrt{2 - x}$ $\Rightarrow$ dom $f = (-\infty, 2]$ que son las soluciones de la inecuación $2 - x \geq 0$. • Si $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ $\Rightarrow$ dom $f = \mathbf{R}$. • Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ $\Rightarrow$ dom $f = (-2, \infty)$ pues son las soluciones de $x + 2 > 0$.

! *Importante*

Para calcular el dominio de una función racional, no se simplifica la fracción racional que la define.

B. Simetría

Las gráficas de las funciones pueden presentar varios tipos de simetrías, aunque solo estudiaremos dos:

1) Una función f es **simétrica respecto del eje de ordenadas** o eje Y si para cualquier punto x de su dominio se cumple que $f(-x) = f(x)$. A las funciones cuya gráfica presenta esta simetría se les llama **funciones pares.**

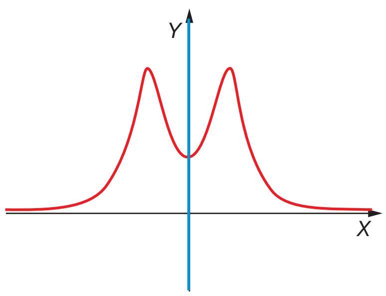
2) Una función f es **simétrica respecto del origen de coordenadas** si para cualquier punto x de su dominio se cumple que $f(-x) = -f(x)$. A las funciones cuya gráfica presenta esta simetría se les llama **funciones impares.**

Si sabemos que una función presenta cualquiera de estos dos tipos de simetría basta con construir su gráfica en los puntos en que $x \geq 0$. Por simetría, podemos dibujar el resto de la gráfica.

EJEMPLO 1

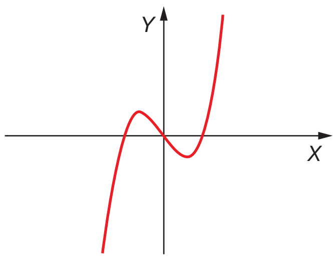
1. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7}{x^4 - 3x^2 + 5}$ es simétrica respecto del eje Y, ya que la función $f(x)$ es par. Veámoslo:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 + 7}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 5} = \frac{2x^2 + 7}{x^4 - 3x^2 + 5} = f(x)$$



2. La gráfica de la función $g(x) = x^3 - x$ es simétrica respecto al origen de coordenadas, ya que dicha función es impar, pues

$$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$$



3. La gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{2x + 1}$ no presenta simetría alguna, ya que no es ni par ni impar, pues

$$h(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)^2}{2(-x) + 1} = \frac{-x^3 + x^2}{-2x + 1} \Rightarrow h(-x) \neq h(x) \text{ y } h(-x) \neq -h(x)$$

C. Continuidad

Las funciones que vamos a representar son, por regla general, continuas en su dominio de definición. Mención especial merecen las definidas a trozos, que pueden ser, o no, discontinuas en aquellos puntos en los que cambian de definición, razón por la que debemos estudiar la continuidad en esos puntos.

D. Puntos de corte con los ejes

Son los puntos de la gráfica de la función en los que esta corta al eje de abscisas (eje X) o de ordenadas (eje Y).

Cálculo de los puntos de corte con el eje X

Para calcular los puntos de corte con el eje X, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$, ya que los puntos del eje X tienen su ordenada nula. Las soluciones de la ecuación anterior (si existen) serán la abscisa de cada uno de dichos puntos de corte.

Cálculo de los puntos de corte con el eje Y

Para calcular la ordenada del punto de corte con el eje Y (siempre que el punto $x = 0$ pertenezca al dominio de la función) se calcula $f(0)$, ya que los puntos del eje Y tienen su abscisa nula.

Recuerda

- Una función puede no cortar al eje X, o tener un único o varios e incluso infinitos puntos de corte con él.
- Una función no tiene por qué cortar al eje Y; pero, si lo corta, lo hace en un único punto $(0, f(0))$.

E. Intervalos de signo constante

Una función f es **positiva en un intervalo** si $f(x) > 0$ para cualquier valor x de ese intervalo.

Análogamente, la función f es **negativa en un intervalo** si $f(x) < 0$ en cualquier valor x de ese intervalo.

En los intervalos en los que la función es positiva, su gráfica se encuentra por encima del eje X y, por el contrario, la gráfica está por debajo del eje X en aquellos intervalos donde f es negativa. Para calcular dichos intervalos se estudia:

a) El signo de la función en intervalos cuyos extremos son los puntos en los que no está definida la función.

b) Los puntos de corte con el eje X.

Vocabulario

A los «intervalos de signo constante» también se les denomina «regiones de signo constante de la función».

EJEMPLO 2 (PAU)

Los beneficios de cierta empresa entre los años 2000 y 2007, en millones de euros, siguen la función $B(t) = t^2 - 8t + 15$, donde t representa el número de años transcurridos desde el año 2000. Indica los periodos en los que la empresa obtuvo ganancias (beneficios positivos) y aquellos en los que hubo pérdidas (beneficios negativos). ¿En qué años la empresa ni ganó ni perdió?

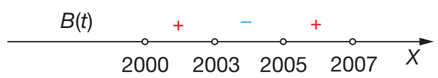
Solución

La empresa ni ganó ni perdió en aquellos años en los que los beneficios fueron nulos, es decir, debemos encontrar los puntos de corte con el eje X. Para ello resolvemos la ecuación

$$B(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} \Rightarrow t = 3 \text{ y } t = 5.$$

Por tanto, la empresa ni ganó ni perdió en los años 2003 y 2005.

Como se puede observar en la figura, la empresa obtuvo ganancias entre los años 2000 y 2003 y entre 2005 y 2007, mientras que generó pérdidas entre los años 2003 y 2005.



EJEMPLO 3 (PAU)

Calcula los puntos de corte con los ejes y los intervalos de signo constante de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1}$.

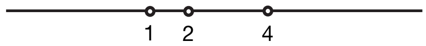
Solución

- Como $x = 0$ pertenece al dominio de f, podemos calcular el punto de corte con el eje Y: $f(0) = -8 \Rightarrow f$ corta al eje Y en el punto $(0, -8)$.
- Puntos de corte con el eje X ($y = 0$):

  Resolvemos la ecuación

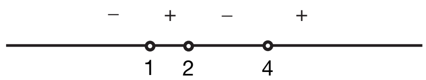
$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 6x + 8 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \text{ y } x = 4$$

  Por tanto, f corta al eje X en los puntos $(2, 0)$ y $(4, 0)$.



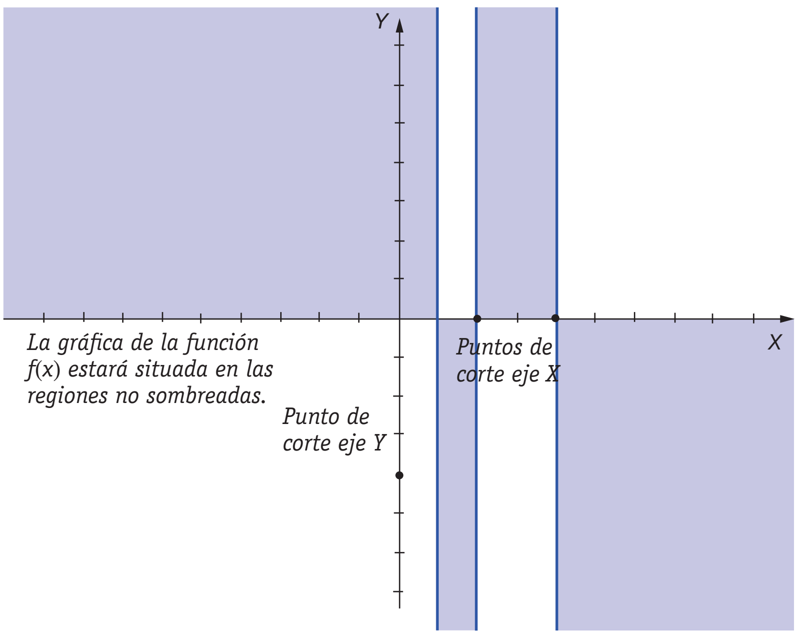
Con todo ello, dividimos la recta real en intervalos cuyos extremos son los dos puntos de corte con el eje X que acabamos de calcular y el punto $x = 1$ donde la función no existe.

Si sustituimos en la función cualquier punto del interior de cada uno de los intervalos en los que hemos dividido el dominio de la función, el signo de f es el que aparece en el esquema correspondiente a la figura. Obtenemos de esta manera que la función f es positiva en $(1, 2) \cup (4, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, 1) \cup (2, 4)$.



Una vez calculados los puntos de corte con los ejes y los intervalos de signo constante, puedes sombrear las regiones del plano en las que sabes que no hay que representar la función. Esto te dará una idea inicial de su gráfica.

Así, la función correspondiente al Ejemplo 3 tendrá su gráfica en las regiones que no hemos sombreado.



F. Asíntotas

Ya tratamos el concepto de asíntota en la Unidad 6. Aquí nos interesa destacar que cabe distinguir tres tipos de asíntotas: *verticales, horizontales* y *oblicuas*.

Asíntotas verticales

La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la función $f(x)$ si se cumple que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.

La recta $x = c$ será, como norma general, una asíntota vertical de una función racional si $x = c$ es un punto donde el denominador se anula (siempre y cuando no lo haga simultáneamente el numerador).

Para conocer el comportamiento de la gráfica a la izquierda y a la derecha de la asíntota vertical, calcularemos los límites laterales.

EJEMPLO 4

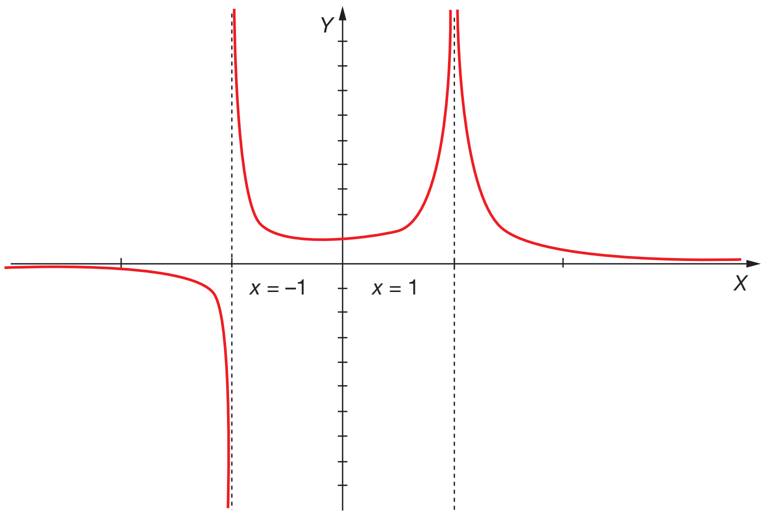
La función $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)^2}$ presenta dos asíntotas verticales:

las rectas $x = -1$ y $x = 1$,

ya que en estos puntos se anula el denominador de la función sin hacerlo el numerador.

Si calculamos los límites laterales de $f(x)$ en esos puntos, obtenemos la tendencia de la función cuando se va acercando a ellos.

- Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$, la gráfica de $f(x)$ en los puntos cercanos a $x = -1$ se comporta tal y como puede observarse en la figura.
- Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, entonces la gráfica de la función toma valores cada vez mayores a medida que la variable independiente se va acercando a $x = 1$.



Asíntotas horizontales

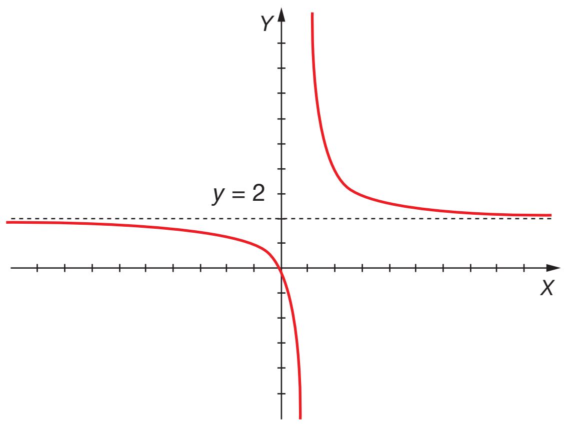
La recta $y = k$ es una **asíntota horizontal** de la función $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$ y/o $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$.

En el caso de una función racional, esta tendrá como asíntota horizontal la recta $y = k$ $(k \neq 0)$ cuando el grado del polinomio numerador y denominador coincidan.

El eje X (recta $y = 0$) será asíntota horizontal de una función racional cuando el grado del numerador sea menor que el grado del denominador.

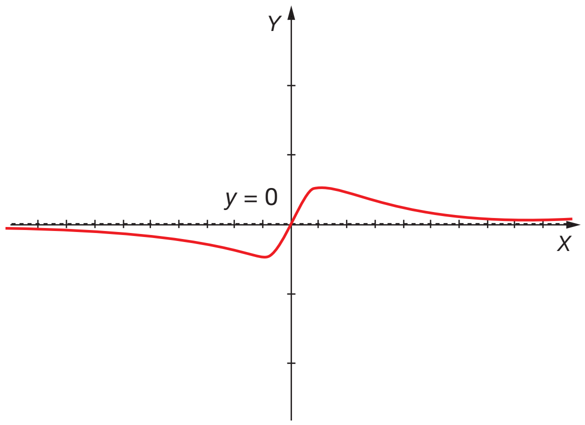
EJEMPLO 5

La recta $y = 2$ es asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, ya que $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$, tal y como se puede observar en la figura.



EJEMPLO 6

El eje X (recta $y = 0$) es asíntota horizontal de la función $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, ya que $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$. Observa la figura.



Asíntotas oblicuas

La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty}(y - f(x)) = 0\,,$$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty}(mx - n - f(x)) = 0\,.$$

Como consecuencia de lo anterior, el cálculo de la pendiente m y la ordenada en el origen n de la asíntota oblicua será:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$$

En el caso de una función racional, esta tendrá una asíntota oblicua si el grado del numerador supera en uno al grado del denominador. En este caso, la ecuación de la asíntota será el cociente de dividir el polinomio numerador entre el polinomio denominador.

En una función racional, las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles, pues los grados del numerador y denominador determinan el tipo de asíntota.

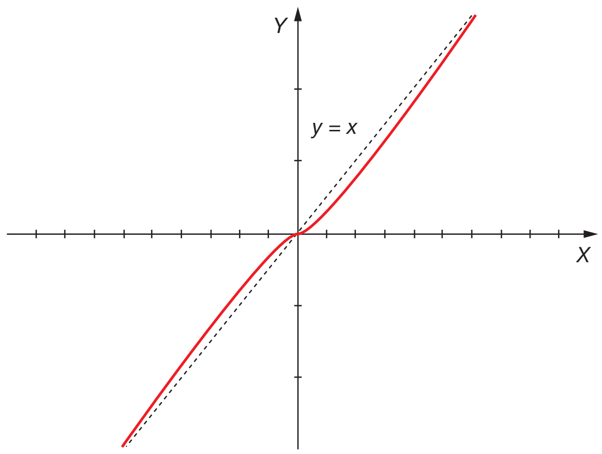
EJEMPLO 7

La función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ tiene una asíntota oblicua, pues es racional y el grado del numerador excede en uno al del denominador. Por tanto, no posee asíntotas horizontales. Calculamos entonces la ecuación de la asíntota oblicua.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 1x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow n = 0$$

Luego la recta $y = x$ es una asíntota de la función $f(x)$. Observa la figura.

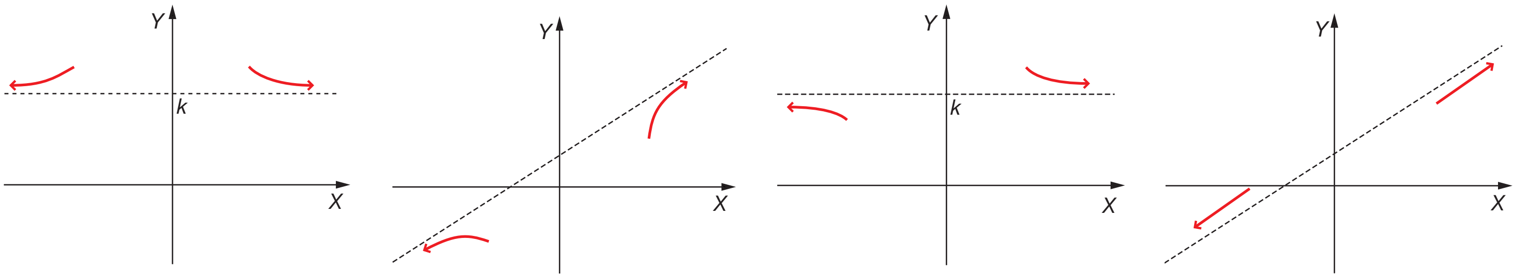


Posición de la gráfica de la función respecto a una asíntota

Para calcular la posición de la gráfica de una función con respecto a una asíntota horizontal u oblicua seguiremos el mismo proceso que en el Ejemplo 7, que consiste en calcular:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - \text{asíntota})$$

Evidentemente, por la propia definición de asíntota, este límite debe dar cero. Pero pueden ocurrir tres casos:



a) Si esos valores que tienden a cero son números positivos, entonces la gráfica de la función estará por encima de la asíntota.

b) Si por el contrario son negativos, la curva estará situada por debajo de la recta.

c) También puede ocurrir que, cuando $x \to -\infty$, la gráfica esté por encima de la asíntota y, cuando $x \to +\infty$,esté por debajo o viceversa.

Observa

En una función racional se cumple:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{p(x)}{q(x)} - \text{asíntota}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{r(x)}{q(x)}$$

donde $r(x)$ es el resto de $p(x)/q(x)$.

EJEMPLO 8

Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1}$.

Solución

- **Asíntotas verticales:** hacemos cero el denominador: $x - 1 = 0$; por tanto, la asíntota vertical es la recta $x = 1$, ya que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} = \pm\infty$$

Si calculamos los límites laterales, conoceremos el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 1$, así:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} = \frac{8}{0^-} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} = \frac{8}{0^+} = \infty$$

- **Asíntotas horizontales:** el grado del numerador excede en uno al del denominador; por tanto, esta función tiene una asíntota oblicua y, como consecuencia de esto, no tiene asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** para calcularlas hemos de dividir el numerador entre el denominador.

Al dividir $x^2 - 6x + 8$ entre $x - 1$, obtenemos como cociente el polinomio $x - 5$ y de resto 3.

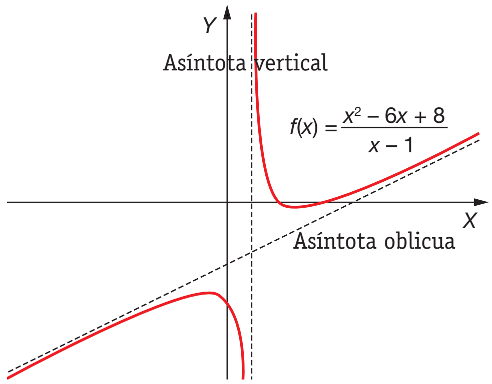
Luego la recta $y = x - 5$ es una asíntota de la función $f(x)$.

Para ver la posición de la gráfica con respecto a la asíntota, calculamos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x - 1} = 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{3}{x - 1} = 0^-$$

Por consiguiente, la gráfica de la función se encuentra por encima de la asíntota cuando $x \to \infty$ y por debajo cuando $x \to -\infty$.

Observa gráficamente en la figura los resultados obtenidos.



8.2 Información extraída de la función derivada

Extremos relativos. Monotonía

El estudio de la primera derivada nos proporciona los posibles extremos de la función, así como los intervalos de crecimiento y de decrecimiento (monotonía). Para ello procederemos de la siguiente forma:

1. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. Sus soluciones y los puntos donde la función no es derivable son los posibles máximos y mínimos relativos de la función.
2. Realizamos un esquema para estudiar el signo de la derivada en los intervalos que definen los siguientes tres tipos de puntos:
   — Los que anulan la primera derivada.
   — Aquellos en los que la función no es derivable.
   — Aquellos en los que no está definida la función.
3. A partir de ahí podemos definir los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como los extremos relativos.
4. De forma habitual no será necesario calcular la segunda derivada para la determinación de los extremos; bastará comprobar que en la función derivada se produce un cambio de signo en cada uno de ellos.

Debemos tener en cuenta que la ordenada de cada extremo relativo la calcularemos sustituyendo en la función el correspondiente valor de la abscisa obtenida.

Recuerda

$f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en (a, b).

$f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en (a, b).

$f'(a) = 0 \Rightarrow (a, f(a))$ posible extremo.

Errores típicos

Calcular la ordenada de los extremos en la función derivada. Lo correcto es calcular en la función.

8.3 Información extraída de la función segunda derivada

Puntos de inflexión. Curvatura

Para confirmar los extremos relativos calculados a partir de la resolución de la ecuación $f'(x) = 0$, podemos utilizar el llamado **criterio de la segunda derivada.** Si en $x = c$ hay un extremo de la función $f(x)$, entonces en $x = c$ existe:

- Un máximo si $f''(c) < 0$.
- Un mínimo si $f''(c) > 0$.

Por otra parte, el estudio de la segunda derivada nos proporciona los posibles puntos de inflexión de la función, así como los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo (curvatura). Para ello procedemos del siguiente modo:

1. Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$. Sus soluciones son los posibles puntos de inflexión (puntos donde la función cambia de curvatura).
2. Realizamos un esquema para estudiar el signo de la segunda derivada en los intervalos que definen los puntos que anulan la segunda derivada y aquellos puntos en los que no está definida la función.
3. A partir de ahí podemos determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la función, así como los puntos de inflexión.
4. En general, no es necesario calcular la tercera derivada para confirmar la existencia de un punto de inflexión, pues basta comprobar que la segunda derivada cambia de signo en él.

Debemos tener en cuenta que calculamos la ordenada de cada punto de inflexión sustituyendo en la función el correspondiente valor de la abscisa obtenida.

Recuerda

$f''(x) > 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es cóncava en (a, b).

$f''(x) < 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es convexa en (a, b).

$f''(a) = 0 \Rightarrow (a, f(a))$ posible punto de inflexión.

Vocabulario

Recuerda de las Unidades 5 y 7 que *cóncava hacia arriba* es sinónimo de *cóncava* y *cóncava hacia abajo* lo es de *convexa*.

EJEMPLO 9 (PAU)

Representa gráficamente la función $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 7$.

Solución

Como toda función polinómica, $f(x)$ está definida, es continua y derivable en todos los números reales y no presenta asíntotas.

Al ser una función polinómica de grado 4 con su coeficiente principal negativo, sabemos que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Además:

$$f(-x) = -(-x)^4 + 8(-x)^2 - 7 = -x^4 + 8x^2 - 7 = f(x)$$

Entonces, la función es par y, por tanto, simétrica con respecto al eje *Y*.

Estudiamos la primera y segunda derivada para calcular los extremos relativos y los puntos de inflexión, los cuales, al tratarse de una función polinómica, determinarán prácticamente la gráfica de la función.

$$f'(x) = -4x^3 + 16x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 16x = 0 \Rightarrow 4x(-x^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Luego los posibles extremos de la función tienen como abscisas $x = 0$, $x = -2$ y $x = 2$.

Calculamos la 2.ª derivada para confirmar los extremos relativos: $f''(x) = -12x^2 + 16$.

- Como $f''(0) = 16 > 0 \Rightarrow$ El punto $(0, f(0)) = (0, -7)$ es un mínimo relativo de la función.
- Como $f''(-2) = f''(2) = -32 < 0 \Rightarrow$ Los puntos $(2, f(2)) = (2, 9)$ y $(-2, f(-2)) = (-2, 9)$ son máximos relativos de $f(x)$.

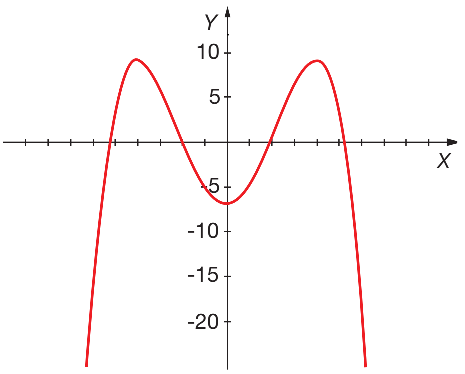
A partir de la segunda derivada también podemos calcular los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -12x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 4/3 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, los puntos de inflexión son: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{17}{9}\right)$

y, por simetría, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{17}{9}\right)$, ya que $f'''(x) = -24x \Rightarrow f'''\left(\pm 2/\sqrt{3}\right) \neq 0$.

Por último, representamos la función:



Claves y consejos

En las funciones polinómicas es bastante fácil calcular las derivadas sucesivas (no como en las racionales). Por tanto, se puede comprobar que los extremos son máximos o mínimos calculando el signo de la segunda derivada en vez de obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Claves y consejos

En funciones de estas características, puedes sustituir el cálculo de los puntos de corte con los ejes y los puntos de inflexión por una tabla de valores fácilmente calculables.

Es fácil calcular el punto de corte con el eje *Y*, pero ten en cuenta que para calcular los puntos de corte con el eje *X* debes resolver una ecuación de grado 4.

PRUEBA 1

El ayuntamiento está realizando un estudio sobre el nivel de contaminación acústica en la ciudad. Un primer plan de choque afectará a aquellos lugares donde se llegue a superar los 65 decibelios en horario diurno. En un barrio de la ciudad se han realizado mediciones de ruido en la franja horaria más conflictiva, modelándose el nivel de ruido mediante la siguiente función (R indica el ruido en decibelios y x el tiempo entre las 9 y las 14 horas de un día laborable):

$$R(x) = 2\,943 - 780x + 69x^2 - 2x^3 \qquad 9 \le x \le 14$$

a) Indica cuándo crece el nivel de ruido y cuándo decrece.

b) Dibuja la gráfica de la función. ¿Se debería iniciar un plan de choque en ese barrio?

c) Puesto que para $x = 11{,}5$ la segunda derivada de R vale 0, ¿qué le sucede a la gráfica en $x = 11{,}5$?

Principado de Asturias

Antes de responder

1. Lee atentamente y fíjate

Debemos estudiar la monotonía de una función polinómica de grado 3 cuyo dominio está restringido al intervalo [9, 14]. Posteriormente hay que representar la función en el marco de un problema contextualizado a las ciencias sociales.

2. Recuerda

- La representación gráfica de funciones polinómicas (recuerda que las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo su dominio).
- La información que se extrae al estudiar la primera y segunda derivada de una función.
- Concepto de punto de inflexión.

3. ¿Cómo responder a la pregunta?

No olvides que esta función relaciona la magnitud «tiempo» medido en horas desde las 9 hasta las 14 horas del día con el nivel de ruido medido en decibelios.

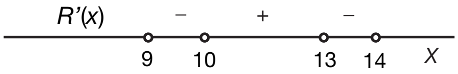
En el primer apartado estudia la monotonía a partir de la derivada de la función. Aprovecha lo obtenido en el Apartado a) para calcular los extremos relativos que, junto con los puntos de comienzo y final de la gráfica, te proporcionarán la información necesaria para representar la función. Interpreta el valor de la abscisa del máximo relativo para compararlo con el valor límite establecido en el enunciado del problema y responder a la pregunta relativa al plan de choque. Ten en cuenta el concepto de punto de inflexión para poder responder al Apartado c).

Respuesta

a) Para obtener los posibles extremos, calculamos $R'(x) = -780 + 138x - 6x^2$, igualamos a cero, simplificamos y cambiamos de signo la ecuación (para facilitar su resolución):

$x^2 - 23x + 130 = 0$; $x = \dfrac{23 \pm \sqrt{529 - 520}}{2} = \dfrac{23 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{23 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 13$ y $x = 10$. Estos son los posibles extremos.

Estudiamos el signo de la derivada para averiguar el crecimiento.

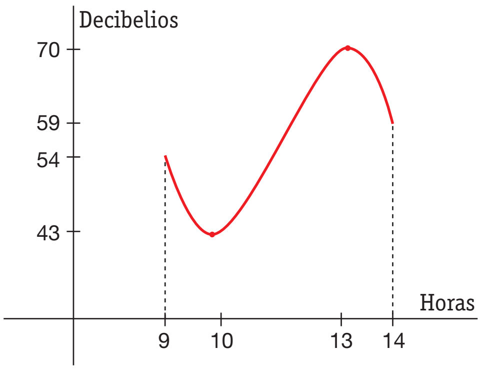


Por tanto, la función $R(x)$ es creciente en $(10, 13)$ y decreciente en $(9, 10) \cup (13, 14)$. Luego el nivel de ruido crece desde la 10 a las 13 horas y decrece entre las 9 y las 10 horas y entre las 13 y las 14 horas.

b) Como consecuencia de lo obtenido en el apartado anterior, $R(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(10, R(10)) = (10, 43)$ y un máximo relativo en el punto $(13, R(13)) = (13, 70)$.

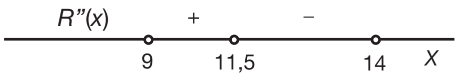
Calculamos también el valor de la función en los extremos del dominio, obteniéndose que la gráfica comienza en el punto $(9, 54)$ y finaliza en el $(14, 59)$.

Con todos estos datos, la representación gráfica es:



El ayuntamiento debe iniciar un plan de choque, pues a las 13 horas se alcanzan los 70 decibelios, por encima de los 65 decibelios establecidos como límite de ruido para el horario diurno.

c) Como la segunda derivada en $x = 11{,}5$ se anula, esto implica que la gráfica de la función tiene un posible punto de inflexión en el punto $(11{,}5, R(11{,}5))$, es decir $(11{,}5, 56{,}5)$. Para verificarlo, procedemos a estudiar el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto $x = 11{,}5$.



Por tanto, la función $R(x)$ pasa de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en el citado punto, como se puede apreciar gráficamente en la figura. Con lo cual el punto $(11{,}5; 56{,}5)$ es un punto de inflexión.

ERROR FRECUENTE

Representar la función en toda la recta real sin restringirse a su dominio, en este caso el intervalo $[9, 14]$.

SIGUE PRACTICANDO

1> La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes condiciones:

- Pasa por el punto $(0, 0)$.
- Tiene un máximo local en el punto $(1, 2)$.

Se pide: obtener el valor de los coeficientes a, b y c.

Comunidad de Madrid

PRUEBA 2

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

a) Calcula las asíntotas y el dominio de definición de la función.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Representa gráficamente la función $f(x)$.

d) Obtén la expresión de la recta tangente a dicha función en $x = 3$.

Castilla y León

Antes de responder

1. Lee atentamente y fíjate

Hay que calcular los datos que nos piden de una determinada función y, después, representarla gráficamente. El grado del numerador coincide con el del denominador; por tanto, f presenta una asíntota horizontal.

2. Recuerda

- La representación gráfica de funciones racionales. Al tratarse de una función racional, debes tener cuidado con el valor que anula el denominador.
- El cálculo de la recta tangente a la gráfica de una función un punto.

3. ¿Cómo responder a la pregunta?

Comienza calculando el dominio y las asíntotas. Para representar la función coloca las asíntotas. No olvides marcar las flechas de las tendencias que te indiquen la posición de la gráfica con respecto a ellas.

Respuesta

a) Para calcular el dominio hay que resolver la ecuación «denominador = 0», pues sus soluciones van a ser los puntos donde no exista:

$$\text{dom } f = \mathbf{R} - \{2\}, \text{ ya que } x = 2 \text{ es la solución de la ecuación } x - 2 = 0$$

Para confirmar la existencia de asíntota y la posición de la función con respecto a esta, calculamos los límites laterales en cada uno de los puntos:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty \Rightarrow \text{La recta } x = 2 \text{ es una asíntota vertical}$$

Para obtener la asíntota horizontal, calculamos el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \Rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ es una asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \text{asíntota}) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x-2} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-2} = 0^-$$

Con lo cual la gráfica, cuando $x \to -\infty$, está por debajo de la asíntota.

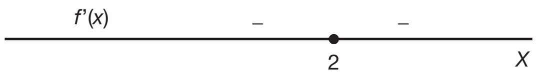
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \text{asíntota}) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x-2} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = 0^+$$

Con lo cual la gráfica, cuando $x \to +\infty$, está por encima de la asíntota.

b) Calculamos la primera derivada para estudiar la monotonía de la función: $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

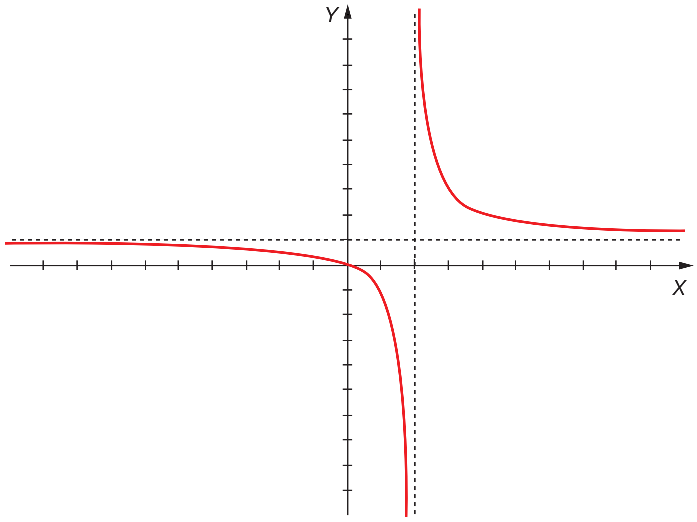
La derivada, para cualquier valor de x, es negativa, ya que el numerador es negativo y el denominador positivo. Por tanto, $f(x)$ es siempre decreciente. Para asegurarnos, dividimos la recta real y estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo.

Por tanto, f es decreciente en todo su dominio, es decir en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.



c) Como consecuencia del apartado anterior, la derivada nunca se anula y, por tanto, la función no tiene extremos relativos.

Calculamos los puntos de corte con los ejes para precisar un poco más la gráfica. Tanto si lo intentamos con el eje X como con el eje Y, obtenemos que f pasa por el punto $(0, 0)$. Por tanto, la gráfica de $f(x)$ es la que aparece a la derecha.



d) Como la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 3$ es:

$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3)$, calculamos $f'(3) = \dfrac{-2}{(3-2)^2} = -2$ y $f(3) = \dfrac{3}{3-2} = 3$.

Sustituyendo: $y - 3 = 2\,(x - 3)$.

Operando, la ecuación en forma explícita es: $y = 2x - 3$.

CLAVES Y CONSEJOS

Aunque el problema no te lo pide expresamente, es conveniente que estudies la posición de la gráfica con respecto a la asíntota. Te orientará a la hora de representarla.

Puedes calcular algún punto por el que pase la gráfica de la función, que te servirá de ayuda para la representación gráfica. Por ejemplo, el punto de corte con los ejes.

Utilizando la derivada ya calculada en el Apartado c), valora en $x = 3$, para obtener la pendiente de la recta tangente, y sustituye este valor, junto con el punto de tangencia, en la ecuación de dicha recta tangente.

TEN CUIDADO

Al ser una función racional y tener una asíntota horizontal, no tiene asíntotas oblicuas.

SIGUE PRACTICANDO

2> Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, se pide:

a) Calcular su dominio y asíntotas.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Hacer su representación gráfica aproximada.

Región de Murcia

PRUEBA 3

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Estudiar su monotonía y los extremos.

d) Hacer su representación gráfica aproximada.

Región de Murcia

Antes de responder

1. Lee atentamente y fíjate

Se trata de representar gráficamente una función racional a partir de unos datos calculados previamente. El grado del numerador excede en uno al del denominador; por tanto, $f(x)$ presenta una asíntota oblicua y ninguna horizontal.

2. Recuerda

La representación gráfica de las funciones racionales. Como en la Prueba 2 de esta Unidad, al tratarse de una función racional, has de tener cuidado con el valor que anula el denominador.

3. ¿Cómo responder a la pregunta?

Comienza calculando los datos que te piden. Para representar la función coloca máximos, mínimos y las asíntotas. No olvides marcar las flechas de las tendencias que te indiquen la posición de la gráfica con respecto a ellas, procurando ser especialmente ordenado.

Respuesta

a) Como esta es una función racional, su dominio serán todos los números reales excepto aquellos en los que se anule el denominador. Es decir, todos los números reales menos las raíces de $x^2 - 1$, que son 1 y −1. Por tanto: dom $f = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$.

b) Los posibles puntos donde se encuentran las asíntotas verticales son aquellos en los que la función no existe. Calculamos los límites laterales en cada uno de esos puntos para confirmar la existencia de asíntota y la posición de la función con respecto a esta: como

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty \Rightarrow \text{la recta } x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

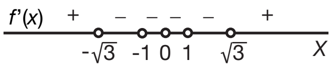
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty \Rightarrow \text{la recta } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

La función no presenta asíntotas horizontales debido a que el grado del numerador excede en uno al del denominador. Por eso tiene una asíntota oblicua. Para calcularla dividimos x^3 entre $x^2 - 1$. Como el cociente es $x \Rightarrow$ la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$.

c) Estudiamos la primera derivada para averiguar los posibles extremos relativos y la monotonía de la función:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}. \text{ Luego } x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada para determinar el crecimiento.



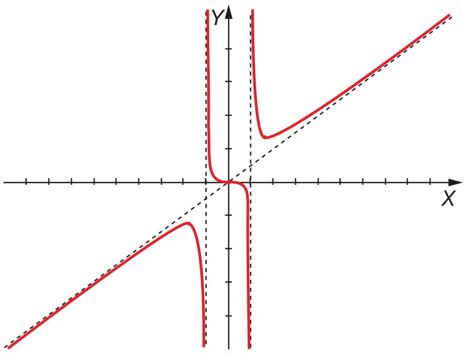
Por tanto, f es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

y creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

En el punto $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = \left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ la función tiene un máximo relativo y en $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ existe un mínimo relativo.

d) Como no hay que identificar los puntos de inflexión, no debemos calcular la segunda derivada ni utilizarla para descubrir si un extremo relativo es máximo o mínimo. Usamos en su lugar el signo de la derivada antes y después de cada punto singular.

Para que la representación gráfica sea más precisa calculamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas; en este caso, el (0, 0).



IMPORTANTE

Calcula la asíntota oblicua por el método que te resulte más cómodo, indicando por qué no tiene asíntota horizontal.

Otra forma de calcular la asíntota oblicua es:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

La recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$.

CLAVES Y CONSEJOS

Si quieres ser más riguroso a la hora de representar gráficamente la función, debes crear una pequeña tabla de valores en la que incluyas, entre otros, los puntos de corte con los ejes de coordenadas. Como toda función racional es continua en su dominio, une los puntos más significativos.

SIGUE PRACTICANDO

3> Sea $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$. Determinar:

a) Dominio de definición.
b) Asíntotas, si existen.
c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función, así como sus máximos y mínimos, si es que existen.

Cantabria

PRUEBA 4

Sea la función $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$:

a) Determina sus asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

b) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

c) Represéntala gráficamente.

La Rioja

Antes de responder

1. Lee atentamente y fíjate

La expresión algebraica de la función es un binomio (o un cociente) elevado al cuadrado. Esto nos asegura que la función siempre va a ser positiva, es decir, su gráfica siempre se encontrará situada por encima del eje *X*.

OBSERVA

En una función racional, los puntos donde posiblemente haya asíntotas verticales son aquellos en los que se anule el denominador.

2. Recuerda

- La representación gráfica de funciones racionales. Como en todas las funciones racionales, debes tener cuidado con el valor que anula el denominador.
- El cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.

TEN CUIDADO

Al ser una función racional y tener una asíntota horizontal, no tiene asíntotas oblicuas.

3. ¿Cómo responder a la pregunta?

Antes de empezar a responder a la pregunta, te aconsejamos que realices la suma situada en el paréntesis de la expresión algebraica de la función. De ese modo te resultará más fácil operar con ella.

Respuesta

a) Como el único valor de x que anula el denominador es el 0, posiblemente tenga ahí una asíntota vertical. Calculamos, pues, los límites laterales en ese punto para confirmar la existencia de asíntota y la posición de la función con respecto a esta:

$f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \infty \Rightarrow$ La recta $x = 0$ (el eje *Y*) es una asíntota vertical.

Si comparamos los grados del numerador y del denominador, deducimos que posee asíntota horizontal y, por tanto, no posee oblicua:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ es una asíntota horizontal}$$

Estudiamos la primera derivada para averiguar los posibles extremos relativos de la función:

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{x+1}{x^3}\right);\ f'(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Luego en $x = 1$ la función presenta un posible extremo relativo.

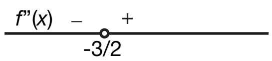
$$f''(x) = -2 \cdot \left(\frac{x^3 + 3x^2(x+1)}{x^6}\right)$$

Como $f''(-1) = 2 \cdot \left(\frac{2(-1)+3}{(-1)^4}\right) = 2 > 0 \Rightarrow$ En $(-1, 0)$, $f(x)$ presenta un mínimo relativo.

Calculamos los puntos de inflexión de la función $f(x)$, para ello:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{2x+3}{x^4}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

En $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{9}\right)$ hay un punto de inflexión, conclusión a la que hemos llegado a partir del estudio de la curvatura de la función.



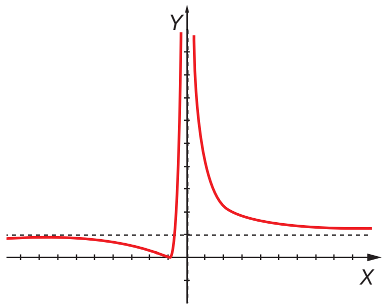
b) La ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x = 2$ es: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$.

Calculamos: $f'(2) = -2\frac{2+1}{2^3} = -\frac{3}{4}$ y $f(2) = \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Sustituyendo: $y - \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}(x-2)$

Operando, la ecuación en forma implícita es: $3x + 4y - 15 = 0$

c) La gráfica de $f(x)$ es:



IMPORTANTE

Utiliza el criterio de la segunda derivada para clasificar el o los extremos relativos, ya que es necesario su cálculo para la obtención de los puntos de inflexión que te pide el ejercicio. No es necesario que calcules los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

CLAVES Y CONSEJOS

Utilizando la derivada ya calculada en el apartado anterior, valora en $x = 2$ para obtener la pendiente de la recta tangente y sustituye este valor junto con el punto de tangencia en la ecuación de dicha recta tangente.

CLAVES Y CONSEJOS

Para representar gráficamente la función propuesta, además de basarte en los datos obtenidos en el Apartado a) del ejercicio, podrías calcular algunos puntos por los que pasa la gráfica. Así, si damos valores a la x, obtendremos que pasa por $(1, 4)$, el $\left(2, \frac{9}{4}\right)$...

SIGUE PRACTICANDO

4> Se considera la curva de ecuación $y = \frac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Hallar las asíntotas de la curva.

Comunidad de Madrid

Actividades propuestas

1> PAU a) Derive las siguientes funciones:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x\,,\; g(x) = \frac{6 - x^5}{x^6}\,,\; h(x) = e^{x^3}$$

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que $f(x)$ alcanza máximo o mínimo relativo.

2> PAU ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 4}$?

3> PAU Dada la función $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$. Calcula los máximos y mínimos locales y justifica que lo son.

4> PAU Dada la función $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

5> PAU Dada la función $g(x) = x^2 - x^4$:

a) Obtén la ecuación de la recta tangente en el punto (1, 0).
b) Calcula sus extremos (máximos y mínimos), puntos de inflexión e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Represéntala gráficamente.

6> PAU Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, hallar: cortes con los ejes, máximos, mínimos y puntos de inflexión, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y gráfica.

7> PAU Un dirigente de cierto partido político afirma que dimitirá si el porcentaje de votantes al partido no alcanza el 20 %. Se estima que el porcentaje de participación en la consulta será al menos el 40 % y que el porcentaje de votantes al partido dependerá del porcentaje de participación según esta función (P indica el porcentaje de votantes y x el de participación):

$P(x) = -\,0{,}00025x^3 + 0{,}045x^2 - 2{,}4x + 50$
$(40 \le x \le 100)$

a) Indica cuándo crece el porcentaje de votantes al partido y cuándo decrece. Según la función, ¿es posible que el dirigente no tenga que dimitir?
b) Dibuja la gráfica de la función.

8> PAU Construye una función que verifique simultáneamente:

- Es discontinua en $x = 3$ y $x = 5$.
- No es derivable en $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

9> PAU El índice de popularidad de cierto gobernante era de 2,5 puntos cuando inició su mandato. A los 50 días alcanzó el máximo índice de popularidad con 7,2 puntos. Sabiendo que durante los primeros 100 días de su mandato dicho índice fue cambiando de acuerdo con la expresión: $I(t) = At^2 + Bt + C$, $0 \le t \le 100$, se pide:

a) Determinar las constantes A, B y C. Justificar la respuesta.
b) Representar la función obtenida.

10> PAU Dada la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$, se pide:

a) Calcular su dominio.
b) Determinar las asíntotas y los cortes con los ejes.
c) Determinar máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Hacer su representación gráfica aproximada.

11> PAU Se considera la función

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

a) Calcula los máximos y mínimos de $f(x)$.
b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo (0,5).

12> PAU Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$:

a) Determinar las asíntotas de la función.
b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

13> PAU Dada la función $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$:

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos.
b) Calcula su dominio, asíntotas y puntos de inflexión.
c) Represéntala gráficamente.

14> Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, se pide:

a) Calcular su dominio, asíntotas, cortes con los ejes y el signo de la función.
b) Determinar los extremos relativos indicando los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Hacer su representación gráfica aproximada.

15> PAU Dada la función $f(x) = \dfrac{10x}{x^2 + 4}$:

a) Determina sus asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
b) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Represéntala gráficamente.

16> PAU Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, se pide:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos relativos.
e) Utiliza toda la información anterior para representarla gráficamente.

17> PAU Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

a) Hallar sus asíntotas.
b) Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

18> PAU Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, se pide:

a) Hallar el dominio y las asíntotas.
b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Hacer una representación gráfica aproximada.

19> PAU Dada la función real de variable real definida por

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$:

a) Especificar su dominio de definición.
b) Estudiar su continuidad.
c) Calcular sus asíntotas, si las hubiera.

20> PAU Dada $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$, calcule, cuando existan:

a) Las asíntotas verticales y las horizontales.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Los máximos relativos y los mínimos relativos.

21> PAU Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{2 - x}$, se pide:

a) Calcular su dominio.
b) Calcular sus asíntotas.
c) Determinar los máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Hacer su representación gráfica adecuada.

22> PAU Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x - 3}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de los apartados anteriores.

23> PAU Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$. Determine:

1. El dominio de definición.
2. Las asíntotas si existen.
3. El o los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función, así como sus máximos y mínimos.

24> Representa $f(x) = \dfrac{x^2}{(x - 1)^2}$ realizando un estudio previo en el que se trate, al menos, el dominio, los puntos de corte con los ejes, la monotonía, los extremos relativos, la curvatura y las asíntotas.

25> PAU Se considera $f(x) = \dfrac{x^2}{a - bx}$, a y b parámetros reales.

a) Determine los valores de a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 6$ es horizontal.
b) Para $a = 1$ y $b = -1$:
   - b1) Razone cuál es el dominio de $f(x)$ y la existencia de asíntotas verticales.
   - b2) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$.

26> PAU En una región, un río tiene la forma de la curva $y = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ y es cortada por un camino según el eje OX.

Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

27> Dada la curva $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$, calcular:

a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las asíntotas.
c) Hacer una representación gráfica de la misma.

En esta Unidad...

Has practicado contenidos anteriores

En esta Unidad culminas el estudio de funciones iniciado en el primer tema de este bloque de Análisis. Además se tratan y amplían bastantes conceptos estudiados a lo largo del curso pasado. Entre los contenidos tratados anteriormente, cabe destacar los siguientes:

- Representación gráfica de una función polinómica, racional, definida a trozos...
- Límites, continuidad y derivabilidad de funciones.
- Reglas de derivación y derivación sucesiva de funciones.
- Recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- Características y propiedades de una función.
- Estudio de la monotonía y curvatura restringido a la primera y segunda derivada, respectivamente.

Has aprendido nuevos conceptos y métodos

Esta Unidad ha servido de recopilación de conceptos anteriormente estudiados. La representación gráfica de funciones es una de las aplicaciones más importantes de la derivada.

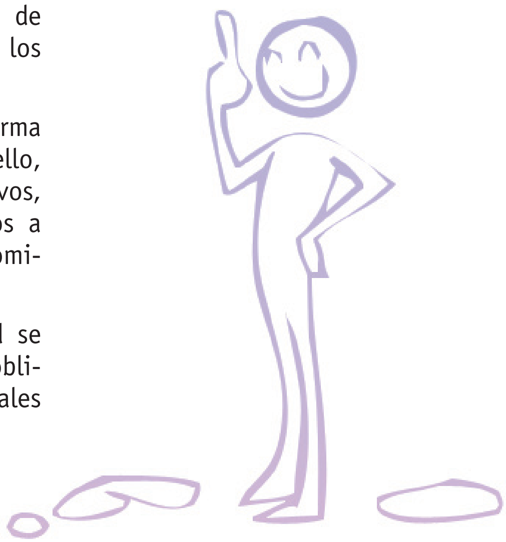
Hemos aportado un método que te sirva para representar cualquier tipo de función, utilizando en cada caso los apartados más adecuados.

Este tema ha sido tratado de forma eminentemente práctica. Por todo ello, hemos tratado pocos conceptos nuevos, pero hemos aplicado los conocidos a funciones, incidiendo en las polinómicas y las racionales.

Entre lo novedoso de esta Unidad se encuentra el cálculo de asíntotas oblicuas, una vez estudiadas las verticales y horizontales.

Has adquirido estrategias para el futuro

- Procedimientos para la representación gráfica de cualquier función. En algunos casos serán la base para el cálculo de áreas.



Descartes

René Descartes, aunque conocido en su época por su nombre en latín Renatus Cartesius, nació en un pueblo de Francia llamado La Haye en 1596.

Debido a la latinización de su nombre, tanto el sistema filosófico que elaboró como el método más corriente mediante el cual se trazan curvas que representan ecuaciones (descubierto por él) se llaman *cartesianos*.

De naturaleza enfermiza, se trasladó a Estocolmo, ciudad en la que fallecería en 1650: enfermó debido al frío húmedo reinante en la capital de Suecia, surcada por canales, y al horario en que impartía clases a la reina Cristina de Dinamarca (¡las 5 de la mañana!), algo que rompió su costumbre de permanecer en la cama hasta después de las 10.