Logaritmos y exponenciales

1	Calcular (sin calculadora): **a)** $\log_2 128$ **b)** $\log_5 625$ **c)** $\log\sqrt{10}$ **d)** $\log 40+\log 25$ **e)** $\log 80-\log 8$ **f)** $\log_3 \sqrt[4]{3^5}$
2	Calcula, sin calculadora: $\log_2 64+\log_2 \frac{1}{4}-\log_3 9-\log_2\sqrt{2}$
3	Sabiendo que $\log 2 = 0,301$, halla: **a)** $\log\sqrt[3]{0,002}$ **b)** $\log\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ **c)** $\log 25$.
4	Utilizando la fórmula del cambio de base, y con ayuda de la calculadora, calcula los siguientes logaritmos: $\log_5 30$, $\log_7 4$, $\log_3 10$.
5	Expresa como un único logaritmo: **a)** $\log 5+\log 20-\log 25$ **b)** $2\log_4 7+\log_4 2-\log_4 5$
6	Simplifica: **a)** $\ln p^2q-\ln\left(\frac{1}{pq}\right)$ **b)** $\log ab-\log\sqrt{ab}$ **c)** $x\log y+x\log\left(\frac{1}{y}\right)$
7	Sea $\log P=x$, $\log Q=y$ y $\log R=z$. Expresa $\log\left(\frac{P}{QR^3}\right)^2$ en función de x, y y z.
8 *IBO May 2009* 	**a)** Halle $\log_2 32$. **b)** Sabiendo que $\log_2\left(\frac{32^x}{8^y}\right)$ se puede escribir en la forma $px+qy$, halle el valor de p y de q.
9 *IBO May 2013* 	Sean $\log_3 p=6$ y $\log_3 q=7$. **a)** Halle $\log_3 p^2$. **b)** Halle $\log_3\left(\frac{p}{q}\right)$. **c)** Halle $\log_3(9p)$.
10 *IBO May 2014* 	Halle el valor de cada una de las siguientes expresiones, como número entero. **a)** $\log_6 36$ **b)** $\log_6 4+\log_6 9$ **c)** $\log_6 2-\log_6 12$

11 *IBO May 2000*

Si $\log_a 2 = x$ y $\log_a 5 = y$, halle en función de x e y, expresiones para:

a) $\log_2 5$ **b)** $\log_a 20$

12 *IBO May 2003*

Suponiendo que $\log_5 x = y$, escriba cada una de las siguientes expresiones en función de y:

a) $\log_5 x^2$ **b)** $\log_5 \left(\dfrac{1}{x}\right)$ **c)** $\log_{25} x$

13

Halla x en: **a)** $\log_8 x = 3^{-1}$ **b)** $8^{-x} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$ **c)** $\log_x 49 = 2$

14 *IBO May 2002*

Resuelva la ecuación $\log_{27} x = 1 - \log_{27}(x - 0,4)$.

15 *IBO May 2005*

Halle la solución **exacta** de la ecuación $9^{2x} = 27^{(1-x)}$.

16 *IBO May 2010*

Resuelva: $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$, para $x > 2$.

17

Resuelve las ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x = 1 + \log(22 - x)$ **b)** $2\log x - \log(x - 16) = 2$

c) $\log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \dfrac{13}{12}$ **d)** $\log_2 x + \log_2(x - 7) = 3$

e) $\log_9 81 + \log_9 \left(\dfrac{1}{9}\right) + \log_9 3 = \log_9 x$ **f)** $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) = \log_2 4$

g) $\log_7 x + \log_7 3 = \log_7(x - 1)$ **h)** $1 + 2\ln(x - 1) = 2$

18

Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $2^x = 1024$ **b)** $3^{x+1} = 729$ **c)** $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

d) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ **e)** $2^{-2x+3} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0$ **f)** $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = \dfrac{13}{9}$

19 *IBO May 2006*

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\ln(x + 2) = 3$ **b)** $10^{2x} = 500$

20 *IBO May 2004*

Escriba cada una de las siguientes expresiones en su forma más sencilla:

a) $e^{\ln x}$ **b)** $e^{\ln x + \ln y}$ **c)** $\ln(e^{x+y})^2$

21

IBO May 2005

a) Sabiendo que $\log_3 x - \log_3(x-5) = \log_3 A$, exprese A en función de x.

b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación: $\log_3 x - \log_3(x-5) = 1$.

22

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **b)** $\ln\sqrt{x-2} = 1$ **c)** $\dfrac{3}{1+e^t} = \dfrac{1}{1-e^t}$

d) $2^x = 5,6^{x-1}$ **e)** $e^{-\frac{1}{4}x} = 100$ **f)** $-3 + e^{-x} = 2$

g) $\dfrac{2}{1-e^{-2x}} = 4$ **h)** $2^{x-3} = 5^{1-x}$ **i)** $\log_x 5 = 12$

23

El número de bacterias, N, t horas después de una infección viene dado por la fórmula: $N = 4,7^{t+1}$.

a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 5 horas?

b) ¿Después de cuántas horas el número de bacterias excederá 5000?

24

Los números binarios se usan en los chips de memoria de los ordenadores. Con un número binario de n dígitos se pueden representar 2^n números distintos.

a) ¿Cuántos números distintos se pueden representar con un número binario de 6 dígitos?

b) ¿Cuántos dígitos se necesitarían para representar 4096 números distintos?

c) ¿Cuál es el número mínimo de dígitos binarios necesarios para representar un millón de números diferentes?

25

En un proceso de fabricación de plásticos, hay dos componentes básicos que se producen en un tanque de reacción. La cantidad de cada componente depende del tiempo, t, en minutos, después de cerrar el tanque:

- La cantidad del compuesto A es $A = 0,9 \cdot 1,2^t$.
- La cantidad del compuesto B es $B = 1,6 \cdot 1,1^t$.

Halla, con dos cifras significativas, el tiempo al cual hay igual cantidad de los dos componentes.

26

En un programa de entrenamiento, un deportista estima que su nivel R de resistencia, n semanas después de empezar el programa, viene dado por la fórmula: $R = 2,3\ln(n+2)$, siendo $0 \le n \le 10$.

a) Halla el nivel de resistencia del deportista al comienzo del entrenamiento.

b) Halla el nivel de resistencia tras cinco semanas de entrenamiento.

c) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar el doble de resistencia que al comienzo del programa?

LOGARITMOS. EJERCICIOS

① a) $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$; b) $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$;

c) $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; d) $\log 40 + \log 25 = \log(40 \cdot 25) = \log 1000 = 3$

e) $\log 80 - \log 8 = \log \frac{80}{8} = \log 10 = 1$; f) $\log_3 \sqrt[4]{3^5} = \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$

② $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^6 + \log_2 2^{-2} - \log_3 3^2 - \log_2 2^{\frac{1}{2}} =$

$= 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

③ a) $\log \sqrt[3]{0'002} = \log(0'002)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log(2 \cdot 10^{-3}) = \frac{1}{3}\left(\log 2 + \log 10^{-3}\right) =$

$= \frac{1}{3}(0'301 - 3) = -0'89966\ldots \simeq -0'900$ (con 3 c.s.)

b) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \log \frac{1}{2^{4/3}} = \log 2^{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3}\log 2 = -\frac{4}{3} \cdot 0'301 = 0'401$.

c) $\log 25 = \log \frac{100}{4} = \log 100 - \log 4 = 2 - \log 2^2 = 2 - 2\log 2 = 2 - 2 \cdot 0'301 =$
$= 1'398 \simeq$
$\simeq 1'40$

④ $\log_5 30 = \frac{\log 30}{\log 5} = 2'11$; $\log_7 4 = \frac{\log 4}{\log 7} = 0'712$;

$\log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} = \frac{1}{\log 3} = 2'10$

⑤ a) $\log 5 + \log 20 - \log 25 = \log \frac{5 \cdot 20}{25} = \log \frac{100}{25} = \log 4$

b) $2\log_4 7 + \log_4 2 - \log_4 5 = \log_4 49 + \log_4 2 - \log_4 5 = \log_4 \frac{49 \cdot 2}{5} = \log_4 \frac{98}{5}$

⑥ a) $\ln p^2 q - \ln\left(\frac{1}{pq}\right) = \ln \frac{p^2 q}{\frac{1}{pq}} = \ln p^3 q^2$

b) $\log ab - \log \sqrt{ab} = \log ab - \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \log ab - \frac{1}{2}\log ab = \frac{1}{2}\log ab =$
$= \log \sqrt{ab}$

c) $x\log y + x\log\left(\frac{1}{y}\right) = x\log y + x\left(\log 1 - \log y\right) = x\log y + x\left(0 - \log y\right) =$

$= x\log y + x(-\log y) = x\log y - x\log y = 0$

---

(7) $\log\left(\frac{P}{QR^3}\right)^2 = 2\log\left(\frac{P}{QR^3}\right) = 2\left(\log P - \log Q - \log R^3\right) =$

$= 2\log P - 2\log Q - 6\log R = 2x - 2y - 6z.$

---

(8) a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

b) $\log_2\left(\frac{32^x}{8^y}\right) = \log_2 32^x - \log_2 8^y = x\log_2 32 - y\log_2 8 =$

$= 5x - 3y \Rightarrow p = 5 \ ; \ q = -3$

---

(11) a) $\log_2 5 = \frac{\log_a 5}{\log_a 2} = \frac{y}{x}$

b) $\log_a 20 = \log_a(2^2 \cdot 5) = \log_a 2^2 + \log_a 5 = 2\log_a 2 + \log_a 5 = 2x + y$

---

(12) a) $\log_5 x^2 = 2\log_5 x = 2y$

b) $\log_5\left(\frac{1}{x}\right) = \log_5 x^{-1} = -\log_5 x = -y$

c) $\log_{25} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 25} = \frac{y}{2}$

---

(13) a) $\log_8 x = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 8^{\frac{1}{3}} = x \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $8^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow (2^3)^{-x} = (2^{-2})^3 \Rightarrow 2^{-3x} = 2^{-6} \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$

c) $\log_x 49 = 2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

---

(14) $\log_{27} x = 1 - \log_{27}(x - 0'4) \Rightarrow \log_{27} x + \log_{27}(x - 0'4) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{27}(x\cdot(x - 0'4)) = 1 \Rightarrow x^2 - 0'4x = 27 \Rightarrow x^2 - 0'4x - 27 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{27}{5} \\ -5 \ \text{(No válida)} \end{cases}$

---

15 $9^{2x}=27^{(1-x)} \to (3^2)^{2x}=(3^3)^{(1-x)} \to 3^{4x}=3^{3-3x} \to 4x=3-3x$

$\to 7x=3 \to x=\frac{3}{7}$

---

17 a) $\log x = 1+\log(22-x) \to \log x = \log 10 + \log(22-x) \to$

$\to \log x = \log(10\cdot(22-x)) \to x = 220-10x \to 11x=220 \to x=20$ ✓

b) $2\log x - \log(x-16)=2 \to \log x^2 - \log(x-16)=2 \to \log\frac{x^2}{x-16}=2$

$\to \frac{x^2}{x-16}=100 \to x^2=100x-1600 \to x^2-100x+1600=0 \to x = \begin{cases} 20 ✓ \\ 80 ✓ \end{cases}$

c) $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log\frac{13}{12} \to \log\frac{x^2+1}{x^2-1}=\log\frac{13}{12} \to$

$\to \frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{13}{12} \to 12x^2+12=13x^2-13 \to x^2=25 \to x=\pm 5$ ✓

d) $\log_2 x + \log_2(x-7)=3 \to \log_2(x\cdot(x-7))=3 \to x^2-7x=8 \to$

$\to x^2-7x-8=0 \to x = \begin{cases} 8 ✓ \\ -1 \text{ No válida.} \end{cases}$

e) $\log_9 81 + \log_9\left(\frac{1}{9}\right)+\log_9 3 = \log_9 x \to \log_9 9^2 + \log_9 9^{-1} + \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9 x$

$\to 2-1+\frac{1}{2}=\log_9 x \to \frac{3}{2}=\log_9 x \to x = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3}=\sqrt{729}=27$

f) $\log_2(x+2)+\log_2(x-1)=\log_2 4 \to \log_2(x+2)(x-1)=\log_2 4 \to$

$\to x^2-x+2x-2=4 \to x^2+x-6=0 \to x = \begin{cases} 2 ✓ \\ -3 \text{ No válida} \end{cases}$

g) $\log_7 x + \log_7 3 = \log_7(x-1) \to$

$\to \log_7(3x)=\log_7(x-1) \to 3x=x-1 \to 2x=-1 \to x=-\frac{1}{2}$ No válida.

h) $1+2\ln(x-1)=2 \to 2\ln(x-1)=1 \to \ln(x-1)=\frac{1}{2} \to x-1=e^{\frac{1}{2}}$

$\to x=\sqrt{e}+1$

---

18 a) $2^x=1024 \to 2^x=2^{10} \to x=10$

b) $3^{x+1}=729 \to 3^{x+1}=3^6 \to x+1=6 \to x=5$

c) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7 \rightarrow 2^x\cdot 2^{-1}+2^x+2^x\cdot 2=7 \rightarrow \boxed{2^x=t} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{2}t+t+2t=7 \rightarrow \frac{7}{2}t=7 \rightarrow t=2 \rightarrow 2^x=2 \rightarrow \boxed{x=1}$

d) $3^{2x+2}-28\cdot 3^x+3=0 \rightarrow 3^{2x}\cdot 3^2-28\cdot 3^x+3=0 \rightarrow \boxed{3^x=t} \rightarrow$

$\rightarrow 9t^2-28t+3=0 \rightarrow t=\begin{cases} 3 \rightarrow 3^x=3 \rightarrow \boxed{x=1} \\ \frac{1}{9} \rightarrow 3^x=\frac{1}{9} \rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$

e) $2^{-2x+3}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=0 \rightarrow 2^{-2x+3}-\frac{1}{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=0 \rightarrow 2^{-2x+3}=\frac{1}{2^{3/2}}$

$\rightarrow 2^{-2x+3}=2^{-\frac{3}{2}} \rightarrow -2x+3=-\frac{3}{2} \rightarrow -2x=-\frac{3}{2}-3 \rightarrow -2x=-\frac{9}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{9}{4}$

f) $3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=\frac{13}{9} \rightarrow 3^x\cdot 3^2+3^x\cdot 3+3^x=\frac{13}{9} \rightarrow \boxed{3^x=t}$

$\rightarrow 9t+3t+t=\frac{13}{9} \rightarrow 13t=\frac{13}{9} \rightarrow t=\frac{1}{9} \rightarrow 3^x=\frac{1}{9} \rightarrow \boxed{x=-2}$

---

19 a) $\ln(x+2)=3 \rightarrow x+2=e^3 \rightarrow x=e^3-2$

b) $10^{2x}=500 \rightarrow \log 10^{2x}=\log 500 \rightarrow 2x=\log 500 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{\log 500}{2}=1'35$

---

20 a) $e^{\ln x}=x$;

b) $e^{\ln x+\ln y}=e^{\ln(x\cdot y)}=x\cdot y$

c) $\ln(e^{x+y})^2=2\ln e^{x+y}=2(x+y)$

---

21 a) $\log_3 x-\log_3(x-5)=\log_3 A \rightarrow \log_3\frac{x}{x-5}=\log_3 A \rightarrow \frac{x}{x-5}=A$

b) $\log_3 x-\log_3(x-5)=1 \rightarrow \log_3\frac{x}{x-5}=1 \rightarrow \frac{x}{x-5}=3 \rightarrow$

$\rightarrow x=3x-15 \rightarrow -2x=-15 \rightarrow x=\frac{15}{2}$

---

22 a) $e^{2x}-3e^x+2=0 \rightarrow \boxed{e^x=t} \rightarrow t^2-3t+2=0 \rightarrow$

$\rightarrow t = \begin{cases} 1 \rightarrow e^x=1 \rightarrow \boxed{x=0} \\ 2 \rightarrow e^x=2 \rightarrow \boxed{x=\ln 2} \end{cases}$

b) $\ln\sqrt{x-2}=1 \rightarrow \ln(x-2)^{\frac{1}{2}}=1 \rightarrow \frac{1}{2}\ln(x-2)=1 \rightarrow$

$\rightarrow \ln(x-2)=2 \rightarrow x-2=e^2 \rightarrow x=2+e^2.$

c) $\frac{3}{1+e^t}=\frac{1}{1-e^t} \rightarrow 3(1-e^t)=1+e^t \rightarrow 3-3e^t=1+e^t \rightarrow$

$\rightarrow 2=4e^t \rightarrow e^t=\frac{1}{2} \rightarrow t=\ln\frac{1}{2}$

d) $2^x=5'6^{x-1} \rightarrow \log 2^x=\log 5'6^{x-1} \rightarrow x\log 2=(x-1)\log 5'6$

$\rightarrow x\log 2=x\log 5'6-\log 5'6 \rightarrow x\log 2-x\log 5'6=-\log 5'6 \rightarrow$

$\rightarrow x(\log 2-\log 5'6)=-\log 5'6 \rightarrow x=\frac{\log 5'6}{\log 5'6-\log 2}=1'67$

e) $e^{-\frac{1}{4}x}=100 \Rightarrow -\frac{1}{4}x=\ln 100 \rightarrow -x=4\ln 100 \rightarrow x=-4\ln 100$

$\rightarrow x=-18'4.$

f) $-3+e^{-x}=2 \rightarrow e^{-x}=5 \rightarrow -x=\ln 5 \rightarrow x=-\ln 5=-1'61$

g) $\frac{2}{1-e^{-2x}}=4 \rightarrow 2=4-4e^{-2x} \rightarrow 4e^{-2x}=2 \rightarrow e^{-2x}=\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow -2x=\ln\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{\ln 1/2}{-2}=0'347.$

h) $2^{x-3}=5^{1-x} \rightarrow \log 2^{x-3}=\log 5^{1-x} \rightarrow (x-3)\log 2=(1-x)\log 5$

$\rightarrow x\log 2-3\log 2=\log 5-x\log 5 \rightarrow x\log 2+x\log 5=\log 5+3\log 2 \rightarrow$

$\rightarrow x(\log 2+\log 5)=\log 5+3\log 2 \rightarrow x=\frac{\log 5+3\log 2}{\log 2+\log 5}=\frac{\log 5+\log 8}{\log 10}=$

$=\log 40=1'60$

i) $\log_x 5 = 12 \Rightarrow x^{12} = 5 \Rightarrow x = \sqrt[12]{5} = 1'14$

---

(23) a) $N = 4'7^{t+1}$

Si $t = 5\,h$: $N = 4'7^{5+1} = 10779'21 \simeq 10779$ bacterias.

b) $5000 = 4'7^{t+1} \Rightarrow \log 5000 = (t+1)\cdot \log 4'7 \Rightarrow t+1 = \dfrac{\log 5000}{\log 4'7}$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log 5000}{\log 4'7} - 1 = 4'50\ h$ Después de 4h y media aprox.

---

(24) a) $2^6 = 64$ números.

b) $4096 = 2^n \Rightarrow 2^{12} = 2^n \Rightarrow n = 12$ dígitos.

c) $2^n = 10^6 \Rightarrow n \log 2 = 6 \Rightarrow n = \dfrac{6}{\log 2} = 19'93 \simeq 20$ dígitos.

---

(25) $A = B \Rightarrow 0'9 \cdot 1'2^t = 1'6 \cdot 1'1^t \Rightarrow \dfrac{1'2^t}{1'1^t} = \dfrac{1'6}{0'9} \Rightarrow \left(\dfrac{1'2}{1'1}\right)^t = \dfrac{1'6}{0'9} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \ln\left(\dfrac{1'2}{1'1}\right) = \ln \dfrac{1'6}{0'9} \Rightarrow t = \dfrac{\ln \frac{1'6}{0'9}}{\ln \frac{1'2}{1'1}} = 6'61$ minutos.

---

(26) a) $n = 0 \Rightarrow R = 2'3 \ln(0+2) = 1'59$

b) $n = 5 \Rightarrow R = 2'3 \ln(5+2) = 4'48$

c) $\cancel{2'3} \ln(n+2) = 2 \cdot \cancel{2'3} \ln 2 \Rightarrow \ln(n+2) = \ln 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(n+2) = \ln 4 \Rightarrow n+2 = 4 \Rightarrow \boxed{n = 2}$ semanas

---

(9) a) $\log_3 p^2 = 2 \log_3 p = 2 \cdot 6 = 12$

b) $\log_3\left(\dfrac{p}{q}\right) = \log_3 p - \log_3 q = 6 - 7 = -1$

c) $\log_3(9p) = \log_3 9 + \log_3 p = 2 + 6 = 8$

---

10 a) $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2\log_6 6 = 2$

b) $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2$

c) $\log_6 2 - \log_6 12 = \log_6 \frac{2}{12} = \log_6 \frac{1}{6} = \log_6 6^{-1} = -1.$

— o —

16 $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3 \; , \; x > 2$

$\log_2 (x \cdot (x-2)) = 3 \Rightarrow \log_2 (x^2 - 2x) = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 2^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$ (No válida)

— o —