

EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I**Temas 4 y 5**

1. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación $x - 2 - \frac{2x+3}{5} < \frac{1}{2}$. Representa gráficamente el intervalo solución.

2. (0,8 puntos) Resuelve la inecuación $x^2 - 8x \geq 0$.

3. (1 punto) Resuelve la inecuación $\frac{x-3}{x+1} < 2$.

4. a) (1,5 puntos) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 3x - y \geq 6 \end{cases}$$

Indica el vértice de la región de soluciones.

b) (0,5 puntos) De los puntos $P(1, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(10, 6)$ y $S(5, 12)$ indica los que no sean solución, explicando el porqué.

5. (2,5 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (0,4 puntos) $8^{2x} = 1024$

b) (0,4 puntos) $\log_5 500 = x$

c) (0,8 puntos) $\log(2x-8) + \log(x+1) = 2$

d) (0,9 puntos) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

6. (1 punto) Calcula el capital acumulado al cabo de 6 años para 20000 euros al 3%, si los intereses se abonan mensualmente.

7. (1 punto) Si se aportan 3000 € anuales a un plan de ahorro, durante 10 años y a un 6% de interés anual, ¿cuánto dinero tendrá el depositante al final de ese periodo de tiempo?

Aclaración: Puede suponerse que los ingresos se hacen el día 1 de enero, desde 2016 a 2025; y que el dinero se retira el día 31 de diciembre de 2026.

Dato: $C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r}$.

8. (1 punto) ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13% de interés compuesto para reunir en 5 años 12000 euros?

Alcalá de Henares, 2 de diciembre de 2015.

JoséMMM

Soluciones

1. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación $x - 2 - \frac{2x+3}{5} < \frac{1}{2}$. Representa gráficamente el intervalo solución.

Solución:

$$x - 2 - \frac{2x+3}{5} < \frac{1}{2} \Rightarrow (\times 10) \Rightarrow 10x - 20 - 2(2x+3) < 5 \Rightarrow 10x - 20 - 4x - 6 < 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6x < 31 \Rightarrow x < 31/6. \text{ Intervalo } (-\infty, 31/6):$$



2. (0,8 puntos) Resuelve la inecuación $x^2 - 8x \geq 0$.

Solución:

$$x^2 - 8x \geq 0 \Rightarrow x(x-8) \geq 0. \text{ Hay que tener en cuenta el signo de los factores } x \text{ y } x-8.$$

- Si $x < 0$, como ambos factores son negativos, el producto $x(x-8) > 0$.
- Si $0 < x < 8$, el primer factor es positivo, pero el segundo es negativo $\Rightarrow x(x-8) < 0$.
- Si $x > 8$, como ambos factores son positivos, el producto $x(x-8) > 0$.

Por tanto, la solución es: $x \in (-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$.

3. (1 punto) Resuelve la inecuación $\frac{x-3}{x+1} < 2$.

Solución:

$$\frac{x-3}{x+1} < 2 \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x-3-2(x+1)}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-5}{x+1} < 0.$$

Hay que estudiar los signos del numerador y denominador de la fracción algebraica. (El numerador se anula en $x = -5$; el denominador, en $x = -1$).

- Si $x < -5$: el numerador es positivo; el denominador, negativo \Rightarrow cociente negativo.
- Si $-5 < x < -1$: ambos términos son negativos \Rightarrow cociente positivo.
- Si $x > -1$: el numerador es negativo; el denominador, positivo \Rightarrow cociente negativo.

Por tanto, la solución es: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$.

4. a) (1,5 puntos) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 3x - y \geq 6 \end{cases}$$

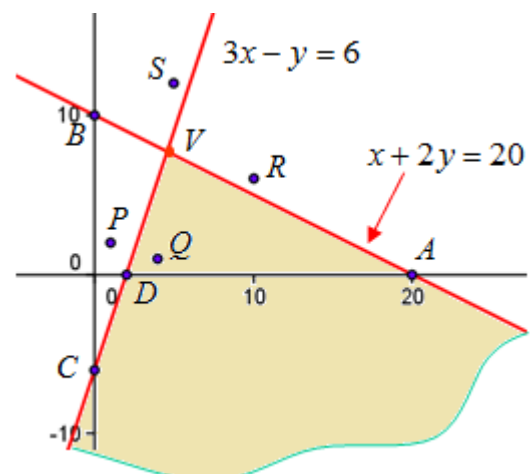
Indica el vértice de la región de soluciones.

b) (0,5 puntos) De los puntos $P(1, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(10, 6)$ y $S(5, 12)$ indica los que no sean solución, explicando el porqué.

Solución:

a) La inecuación $x + 2y \leq 20$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $x + 2y = 20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $A(20, 0)$ y $B(0, 10)$

\rightarrow La inecuación $3x - y \geq 6$ determina el semiplano que está a la derecha de la recta $3x - y = 6$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $C(0, -6)$ y $D(2, 0)$



Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} x+2y=20 \\ 3x-y=6 \end{cases}$. Su solución es

$$V\left(\frac{32}{7}, \frac{54}{7}\right).$$

b) El único punto que cumple las dos inecuaciones es $Q(4, 1)$; los otros tres no son de la región de soluciones.

→ $P(1, 2)$ no cumple la inecuación $3x - y \geq 6$.

→ $R(10, 6)$ no cumple la inecuación $x + 2y \leq 20$.

→ $S(5, 12)$ no cumple ninguna de las inecuaciones dadas.

5. (2,5 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (0,4 puntos) $8^{2x} = 1024$

b) (0,4 puntos) $\log_5 500 = x$

c) (0,8 puntos) $\log(2x-8) + \log(x+1) = 2$

d) (0,9 puntos) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

Solución:

a) $8^{2x} = 1024 \Rightarrow (2^3)^{2x} = 2^{10} \Rightarrow 2^{6x} = 2^{10} \Rightarrow 6x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

De otra manera (aplicando logaritmos):

$$8^{2x} = 1024 \Rightarrow \log(8^{2x}) = \log 1024 \Rightarrow 2x \log 8 = \log 1024 \Rightarrow x = \frac{\log 1024}{2 \log 8} = 1,666\dots$$

b) $\log_5 500 = x \Rightarrow 5^x = 500 \Rightarrow \log 5^x = \log 500 \Rightarrow x \log 5 = \log 500 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 500}{\log 5} = 3,861353.$$

Si se conoce la fórmula de cambio de base la respuesta es inmediata: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

c) $\log(2x-8) + \log(x+1) = 2 \Rightarrow \log[(2x-8)(x+1)] = \log 100 \Rightarrow (2x-8)(x+1) = 100 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - 108 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-108)}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 30}{4} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$$

(La solución $x = -6$ no es válida).

d) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 4 \cdot 3 \cdot 3^x + 27 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0 \Rightarrow (3^x = t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases}$$

Si $t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

Si $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

6. (1 punto) Calcula el capital acumulado al cabo de 6 años para 20000 euros al 3%, si los intereses se abonan mensualmente.

Solución:

La expresión que da el capital acumulado es $C = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, siendo r la tasa de interés, t el tiempo en años y n el número de periodos anuales.

En este caso, $C_0 = 20000$ €, el 3% es una tasa de $r = 0,03$ y $t = 6 \Rightarrow 72$ meses.

Si el interés se abona mensualmente ($n = 12$):

$$C = 20000 \left(1 + \frac{0,03}{12}\right)^{12 \cdot 6} = 23938,97 \text{ €}$$

7. (1 punto) Si se aportan 3000 € anuales a un plan de ahorro, durante 10 años y a un 6% de interés anual, ¿cuánto dinero tendrá el depositante al final de ese periodo de tiempo?

Aclaración: Puede suponerse que los ingresos se hacen el día 1 de enero, desde 2016 a 2025; y que el dinero se retira el día 31 de diciembre de 2026.

$$\text{Dato: } C = \frac{a(1+r) \left[(1+r)^t - 1 \right]}{r}$$

Solución:

→ a es la aportación anual: $M = 3000$; $r = 0,06$; $t = 10$.

$$C = \frac{3000 \cdot 1,06 \left[(1,06)^{10} - 1 \right]}{0,06} = \frac{3000 \cdot 1,06 \cdot 0,79085}{0,06} = 41914,05 \text{ €}$$

8. (1 punto) ¿Qué anualidad habrá de colocarse al 13% de interés compuesto para reunir en 5 años 12000 euros?

Solución:

→ a es la aportación anual debe cumplirse que:

$$12000 = \frac{a \cdot 1,13 \left[(1,13)^5 - 1 \right]}{0,13} = \frac{a \cdot 1,13 \cdot 0,84244}{0,113} \Rightarrow \frac{12000 \cdot 0,13}{1,13 \cdot 0,84244} = a \Rightarrow a = 1638,73 \text{ €}$$

Alcalá de Henares, 2 de diciembre de 2015. JoséMMM