EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Primera evaluación

1. (1 punto) Calcula y simplifica: $\frac{2}{5}\left(5x^2-3x\right)^2+4x^2\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{10}\right)$.

2. (0,7 puntos) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente el conjunto de números reales que verifican la inecuación $1<\sqrt{x-2}<3$.

3. Calcula, agrupando y simplificando:

a) (0,6 puntos) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{8}\right)-\left(\frac{3}{5}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$. b) (0,4 puntos) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+2}$.

4. a) (0,8 punto) Factoriza el polinomio $P(x)=x^3-3x^2-4x+12$

b) (0,5 punto) Opera y simplifica el resultado: $\frac{5x-2}{x^2-1}-\frac{3-2x}{x+1}$.

5. (1 punto) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2-2x-y=0 \\ (x+1)^2+y=3 \end{cases}$.

6. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación: $(x-1)^2-2x-1\geq 0$. (0,3 puntos) Representa gráficamente los intervalos solución.

7. (1 punto) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} 2x+5y\geq 20 \\ 4x-10y\geq 0 \end{cases}$$

Indica el vértice de la región de soluciones.

8. (1 punto) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log\frac{1}{x}=-3$ (0,4 puntos) b) $2^x+2^{x+1}+2^{x+3}=88$ (0,7 puntos)

9. (1 punto) En los primeros días del verano una determinada especie de mosquitos crece diariamente a un ritmo del 30%. Si el primer día había 2000 mosquitos, ¿cuántos días han de pasar para que lleguen a 1 millón?

10. (1 punto) Una familia suscribe un préstamo hipotecario de 150000 euros. El banco les ofrece dicha cantidad a un 4,5% anual por un período de 15 años. ¿Cuánto deberán amortizar mensualmente?

Dato: La fórmula que da la amortización mensual es $a=\frac{D(1+r)^n\cdot r}{(1+r)^n-1}$

Alcalá de Henares, 15 de diciembre de 2015. JoséMMM

SOLUCIONES

1. (1 punto) Calcula y simplifica: $\frac{2}{5}\left(5x^2-3x\right)^2+4x^2\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{10}\right)$.

Solución:

$$\frac{2}{5}\left(5x^2-3x\right)^2+4x^2\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{10}\right) = \frac{2}{5}\left(25x^4-30x^3+9x^2\right)+\frac{4}{6}x^4-\frac{8}{3}x^3+\frac{28}{10}x^2 =$$

$$= 10x^4-12x^3+\frac{18}{5}x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{8}{3}x^3+\frac{14}{5}x^2=\frac{32}{3}x^4-\frac{44}{3}x^3+\frac{32}{5}x^2$$

2. (0,7 puntos) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente el conjunto de números reales que verifican la inecuación $1<\sqrt{x-2}<3$.

Solución:

$$1<\sqrt{x-2}<3 \Rightarrow 1<x-2<9 \Rightarrow 3<x<11 \to x\in(3,\ 11)$$

3. Calcula, agrupando y simplificando:

a) (0,6 puntos) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{8}\right)-\left(\frac{3}{5}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$. b) (0,4 puntos) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+2}$.

Solución:

a) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{8}\right)-\left(\frac{3}{5}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right) = 5\sqrt{2}-2\cdot2\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\left(5-4-\frac{3}{5}-4\right)\sqrt{2}=-\frac{18}{5}\sqrt{2}$.

b) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{12}+2} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{12}-2\right)}{\left(\sqrt{12}+2\right)\left(\sqrt{12}-2\right)}=\frac{\sqrt{12}-2-\sqrt{36}+2\sqrt{3}}{12-4}=\frac{2\sqrt{3}-2-6+2\sqrt{3}}{8}=\frac{4\sqrt{3}-8}{8}$.

4. a) (0,8 punto) Factoriza el polinomio $P(x)=x^3-3x^2-4x+12$

b) (0,5 punto) Opera y simplifica el resultado: $\frac{5x-2}{x^2-1}-\frac{3-2x}{x+1}$.

Solución:

a) $P(x)=x^3-3x^2-4x+12 \to$ Posibles raíces: ±1, ±2, ±3, ±6, ±12.

$P(1)=1-3-4+12=6 \Rightarrow x = 1$ no es raíz.

$P(2)=8-12-8+12=0 \Rightarrow x = 2$ es raíz $\Rightarrow x - 2$ es un factor. Se divide por $x - 2$:

	1	–3	–4	12
2		2	–2	–12
	1	–1	–6	0

Por tanto: $P(x)=x^3-3x^2-4x+12=(x-2)\left(x^2-x-6\right)=(x-2)(x+2)(x-3)$

El trinomio $x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases} \Rightarrow x^2-x-6=(x+2)(x-3)$.

b) $\frac{5x-2}{x^2-1}-\frac{3-2x}{x+1} = \frac{5x-2}{x^2-1}-\frac{(3-2x)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{5x-2}{x^2-1}-\frac{3x-3-2x^2+2x}{x^2-1}=\frac{2x^2+1}{x^2-1}$.

5. (1 punto) Resuelve el sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + x^2 - 2x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Si $x = -1$, $y = 1 + 2 = 3$. Solución: punto (–1, 3).
Si $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$. Solución: punto (1, –1).

6. (0,7 puntos) Resuelve la inecuación: $(x-1)^2 - 2x - 1 \geq 0$. (0,3 puntos) Representa gráficamente los intervalos solución.

Solución:

$$(x-1)^2 - 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x(x-4) \geq 0.$$

Hay que tener en cuenta el signo de los factores x y $x - 4$.

- Si $x < 0$, como ambos factores son negativos, el producto $x(x-4) > 0$.
- Si $0 < x < 4$, el, primer factor es positivo, pero el segundo es negativo $\Rightarrow x(x-4) < 0$.
- Si $x > 4$, como ambos factores son positivos, el producto $x(x-4) > 0$.

Por tanto, la solución es: $x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

7. (1 punto) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y \geq 20 \\ 4x - 10y \geq 0 \end{cases}$$

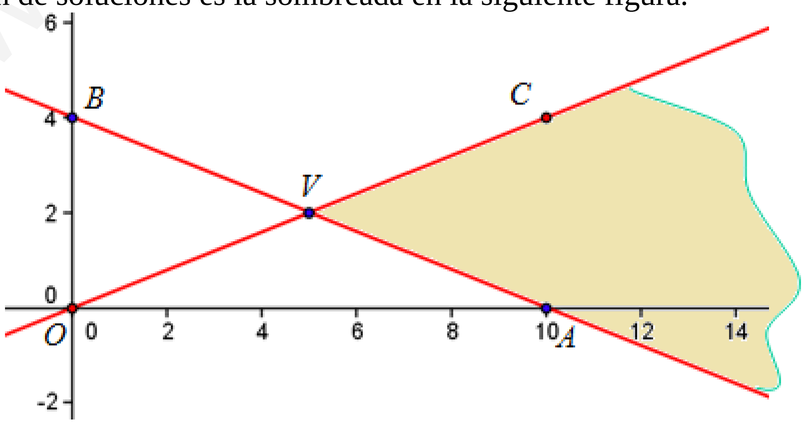
Indica el vértice de la región de soluciones.

Solución:

La inecuación $2x + 5y \geq 20$ determina el semiplano que está por encima de la recta $2x + 5y = 20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $A(10, 0)$ y $B(0, 4)$

La inecuación $4x - 10y \geq 0$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $4x - 10y = 0$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $O(0, 0)$ y $C(10, 4)$.

Por tanto, la región de soluciones es la sombreada en la siguiente figura.



Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ 4x-10y=0 \end{cases}$.

Su solución es $V(5, 2)$.

8. (1 punto) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log\frac{1}{x}=-3$ (0,4 puntos) b) $2^x+2^{x+1}+2^{x+3}=88$ (0,7 puntos)

Solución:

a) $\log\frac{1}{x}=-3 \Rightarrow \frac{1}{x}=10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{10^3} \Rightarrow x=1000$.

b) $2^x+2^{x+1}+2^{x+3}=88 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^x+2^x\cdot 2+2^x\cdot 2^3=88 \Rightarrow 2^x\left(1+2+2^3\right)=88 \Rightarrow 2^x\cdot 11=88 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3$$

9. (1 punto) En los primeros días del verano una determinada especie de mosquitos crece diariamente a un ritmo del 30%. Si el primer día había 2000 mosquitos, ¿cuántos días han de pasar para que lleguen a 1 millón?

Solución:

La expresión que da la población de mosquitos es $P(x)=2000\cdot(1+0,30)^x$, siendo x el tiempo en días.

Para que $1000000=2000\cdot(1+0,30)^x \Rightarrow 500=(1,30)^x \Rightarrow \log 500=\log(1,30)^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log 500 = x\log(1,30) \Rightarrow x=\frac{\log 500}{\log(1,30)}=23,6869 \text{ días.}$$

10. (1 punto) Una familia suscribe un préstamo hipotecario de 150000 euros. El banco les ofrece dicha cantidad a un 4,5% anual por un período de 15 años. ¿Cuánto deberán amortizar mensualmente?

Dato: La fórmula que da la amortización mensual es $a=\frac{D(1+r)^n\cdot r}{(1+r)^n-1}$

Solución:

Un interés anual del 4,5% equivale a una tasa mensual de $r = 0,045/12 = 0,00375$.

El número de meses es $n = 15 \cdot 12 = 180$.

Por tanto:

$$a=\frac{150000(1+0,00375)^{180}\cdot 0,00375}{(1+0,00375)^{180}-1}=1147,49 \text{ €}$$

Alcalá de Henares, 15 de diciembre de 2015. JoséMMM