EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

1. Calcula y simplifica:

a) (0,4 puntos) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^3$.   b) (0,3 puntos) $\left(4x^2-1\right)^2+4x\left(2x-x^3\right)$.

2. (0,7 puntos) Factoriza el polinomio $P(x)=3x^3-9x^2+6x$.

3. (0,9 puntos) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{4x-8}{2x}$ b) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}$ c) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$

4. a) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente los siguientes conjuntos de números reales:

a1) $x \le -1$ (0,3 puntos)   a2) $|x+1|<2$ (0,5 puntos)

b) Halla, racionalizando el resultado, el valor de $\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$. (0,5 puntos)

5. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}=3$ (0,7 puntos)   b) $\sqrt{x}=x-2$ (0,5 puntos)

6. (1 punto) Resuelve la inecuación $-x^2+2x+3>0$. Representa gráficamente los intervalos solución.

7. (1 punto) Sea el sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$. Calcula los valores que debe tomar *b* para que el sistema sea:

a) Compatible determinado.   b) Compatible indeterminado.

8. a) (1 punto) Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x+y>4 \\ x-2y<8 \end{cases}$. Indica el vértice de la región de soluciones.

b) (0, 5 puntos) De los puntos P(1, 2), Q(4, 1), R(6, 2) y S(2, –4) indica los que sean solución

9. (2 puntos) La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es de 60 años. Dentro de 10 años la suma de las edades de los hijos será la actual del padre. Por último, cuando nació el pequeño, la edad del padre era 8 veces la del hijo mayor. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hijos?

Soluciones:

1. Calcula y simplifica:

a) (0,4 puntos) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^3$. b) (0,3 puntos) $\left(4x^2-1\right)^2+4x\left(2x-x^3\right)$.

<u>Solución</u>:

a) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^3=\left(\frac{4-5}{10}\right)^2:\left(\frac{15-12}{10}\right)^3=\frac{1}{100}:\frac{27}{1000}=\frac{10}{27}$

b) $\left(4x^2-1\right)^2+4x\left(2x-x^3\right)=16x^4-8x^2+1+8x^2-4x^4=12x^4+1$

2. (0,7 puntos) Factoriza el polinomio $P(x)=3x^3-9x^2+6x$.

<u>Solución</u>:

$P(x)=3x^3-9x^2+6x=3x\left(x^2-3x+2\right)=3x(x-1)(x-2)$

3. (0,9 puntos) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{4x-8}{2x}$ b) $\frac{3x^2-12}{x+2}$ c) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$

<u>Solución</u>:

a) $\frac{4x-8}{2x}=\frac{4(x-2)}{2x}=\frac{2(x-2)}{x}$.

b) $\frac{3x^2-12}{x+2}=\frac{3(x^2-4)}{x+2}=\frac{3(x+2)(x-2)}{x+2}=3(x-2)$.

c) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}$.

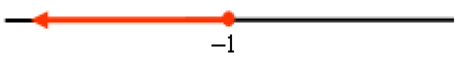
4. a) Expresa en notación de intervalos y representa gráficamente los siguientes conjuntos de números reales:

a1) $x\le -1$ (0,3 puntos) a2) $|x+1|<2$ (0,5 puntos)

b) Halla, racionalizando el resultado, el valor de $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$. (0,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a1) $x\le -1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]$



a2) $|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x\in(-3,1)$

b) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}=\frac{6+\sqrt{30}}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{6+\sqrt{30}}{1}=6+\sqrt{30}$

5. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}=3$ (0,7 puntos) b) $\sqrt{x}=x-2$ (0,5 puntos)

Solución:

a) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}=3 \Rightarrow \dfrac{x(1-x)}{(x+1)(1-x)}+\dfrac{1\cdot(x+1)}{(x+1)(1-x)}=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(1-x)+(x+1)=3(x+1)(1-x) \Rightarrow x-x^2+x+1=3\left(-x^2+1\right) \Rightarrow 2x^2+2x-2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) $\sqrt{x}=x-2 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=(x-2)^2 \Leftrightarrow x=x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1$ y $x=4$.

(La solución x = 1 no vale).

6. (1 punto) Resuelve la inecuación $-x^2+2x+3>0$. Representa gráficamente los intervalos solución.

Solución:

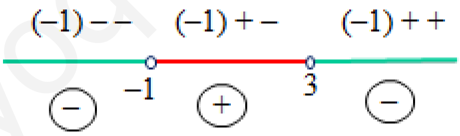
La ecuación asociada $-x^2+2x+3=0$ tiene por soluciones $x=-1$ y $x=3$, luego:

$-x^2+2x+3>0 \Leftrightarrow -(x+1)(x-3)>0$

Estudiando los signos de cada factor (téngase en cuenta que precede (–1)), se deduce:

- Si $x<-1$ ambos factores son negativos $\Rightarrow -(x+1)(x-3)<0 \to$ No es solución.
- Si $-1<x<3$: el primer factor es positivo; el segundo, negativo $\Rightarrow -(x+1)(x-3)>0 \to$ todos los puntos de este intervalo son solución.
- Si $x>3$ ambos factores son positivos $\Rightarrow -(x+1)(x-3)<0 \to$ No es solución..

Por tanto, el conjunto de soluciones viene dado por los puntos del intervalo (–1, 3).



7. (1 punto) Sea el sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$. Calcula los valores que debe tomar *b* para que el sistema sea:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.

Solución:

$\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases} \Rightarrow_{2E2} \begin{cases} 4x+by=5 \\ -4x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow_{E2+E1} \begin{cases} 4x+by=5 \\ (2+b)y=13 \end{cases} \Rightarrow$ (Despejando en la segunda ecuación) $y=\dfrac{13}{2+b}$, que tiene sentido para cualquier valor de $b \neq -2$.

Con esto:

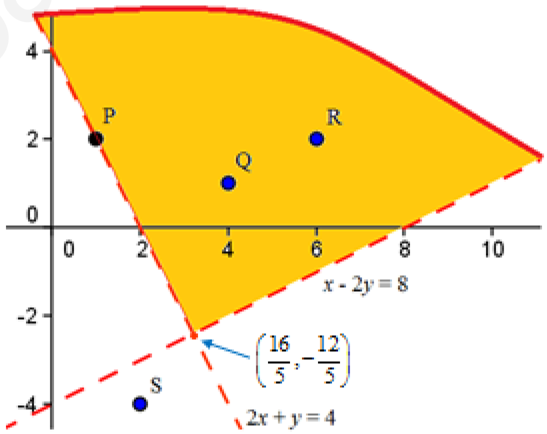
a) El sistema será compatible determinado siempre que $b \neq -2$. En caso contrario, para b = –2, el sistema será incompatible.
b) Nunca es compatible indeterminado.

8. a) (1 punto) Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x+y>4 \\ x-2y<8 \end{cases}$. Indica el vértice de la región de soluciones.

b) (0, 5 puntos) De los puntos P(1, 2), Q(4, 1), R(6, 2) y S(2, –4) indica los que sean solución

Solución:

a) La inecuación $2x+y>4$ tiene por solución los puntos del semiplano situado a la derecha de la recta $2x+y=4$.
La inecuación $x-2y<8$ determina los puntos del plano que están a la izquierda de la recta $x-2y=8$.
La solución del sistema es la parte coloreada en la figura adjunta.



El vértice es el punto de corte de las rectas, que es la solución del sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=8 \end{cases}$.

Se obtiene: $\left(\dfrac{16}{5}, -\dfrac{12}{5}\right)$.

b) Los puntos P y S no forman parte del conjunto de soluciones; R y Q sí son soluciones.

9. (2 puntos) La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es de 60 años. Dentro de 10 años la suma de las edades de los hijos será la actual del padre. Por último, cuando nació el pequeño, la edad del padre era 8 veces la del hijo mayor. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hijos?

Solución:
Sean x, y, z las edades del padre, hijo mayor y menor respectivamente. Por el enunciado, se deducen las ecuaciones:

$x + y + z = 60$ $\rightarrow$ (suma de las edades actuales)
$y + 10 + z + 10 = x$ $\rightarrow$ (suma de edades de los hijos dentro de 10 años)
$x - z = 8(y - z)$ $\rightarrow$ (relación de edades cuando nació el hijo menor).

El sistema formado por las 3 ecuaciones, una vez ordenado y simplificado queda:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=20 \\ x-8y+7z=0 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=20 \\ x-8y+7z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=60 \\ -2y-2z=-40 \\ -9y+6z=-60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2/(-2) \\ E3/(-3) \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=60 \\ y+z=20 \\ 3y-2z=20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=60 & \rightarrow y+12+8=60 \rightarrow x=40 \\ y+z=20 & \rightarrow y+8=20 \rightarrow y=12 \\ -5z=-40 & \rightarrow z=8 \end{cases}$$

El padre tiene 40 años; los hijos, 12 y 8 años.

Observación: Se podría hacer más rápido utilizando la segunda ecuación en las transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=20 \\ x-8y+7z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1+E2 \\ \\ E3+7E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x=80 \\ x-y-z=20 \\ 8x-15y=140 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E2 \end{matrix} \begin{cases} x=40 & \\ x-y-z=20 & \rightarrow 40-12-z=20 \rightarrow z=8 \\ 320-15y=140 & \rightarrow y=12 \end{cases}$$