

## TEMA 5. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

### 1. SACAR FACTOR COMÚN

Cuando **todos** los términos de un polinomio,  $P(x)$ , son múltiplos de un mismo monomio,  $M(x)$ , podemos extraer  $M(x)$  como **factor común**.

Por ejemplo:

$$P(x) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$$

El monomio  $M(x) = 3x$  es factor común a todos los términos de  $P(x)$ . Por tanto:

$$P(x) = 3x (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)$$

Para convencernos de que las dos expresiones son iguales y comprobar que no nos hemos equivocado, podemos realizar la multiplicación, quitando el paréntesis:

$$3x (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$$

Ejercicio resuelto

Extraer factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a)  $A(x) = 100x^5 - 80x^4 + 16x^3$

Todos los sumandos tiene el factor  $x^3$ . Además, 100, 80 y 16 son múltiplos de 4. Por tanto, podemos sacar  $4x^3$  como factor común:

$$100x^5 - 80x^4 + 16x^3 = 4x^3 (25x^2 - 20x + 4)$$

b)  $B(x) = 45x^5 + 120x^3 + 80x$

$5x$  es factor común a los tres sumandos, por tanto:

$$45x^5 + 120x^3 + 80x = 5x (9x^4 + 24x^2 + 16)$$

c)  $C(x) = x^3 + x^2 + x$

$x$  es factor común a los tres sumandos

$$x^3 + x^2 + x = x (x^2 + x + 1)$$

En todos los casos podemos comprobar que si quitamos el paréntesis realizando la multiplicación obtenemos las expresiones iniciales.



1. Saca factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

- a)  $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x$   
 b)  $B(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2$   
 c)  $C(x) = 20x^3 + 15x$   
 d)  $D(x) = 2x^6 + 4x^3 - 2x$   
 e)  $E(x) = 490x^3 - 420x^2 + 90x$   
 f)  $F(x) = 20x^6 + 60x^4 + 45x^2$   
 g)  $G(x) = 81x^4 - 36x^2$   
 h)  $H(x) = 4x - 100x^5$

## 2. IDENTIDADES NOTABLES PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO.

Factorizar es expresar como producto de dos o más factores un número o una expresión algebraica.

Utilizando las identidades notables que vimos en la unidad anterior y sacando factor común, podemos factorizar algunos polinomios. Por ejemplo:

1. Expresar como cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los polinomios siguientes:

- a)  $A(x) = 4x^2 + 4x + 1$   
 b)  $B(x) = 9x^2 - 12x + 4$   
 c)  $C(x) = 4x^2 - 25$

Aplicamos las identidades notables en cada caso:

- a)  $A(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$   
 b)  $B(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$   
 c)  $C(x) = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)(2x-5)$

2. Factorizar todo lo posible los siguientes polinomios:

- a)  $D(x) = 25x^5 - 20x^4 + 4x^3$   
 b)  $E(x) = 18x^5 + 48x^4 + 32x$   
 c)  $F(x) = 100x^2 - 36x^6$

Sacamos factor común y aplicamos las identidades notables en cada caso:

- a)  $D(x) = 25x^5 - 20x^4 + 4x^3 = x^3(25x^2 - 20x + 4) = x^3(5x - 2)^2$

b)  $E(x) = 18x^5 + 48x^4 + 32x = 2x(9x^4 + 24x^2 + 16) = 2x(3x^2+4)^2$

c)  $F(x) = 100x^2 - 36x^6 = 4x^2(25 - 9x^4) = 4x^2 (5 + 3x^2) (5 - 3x^2)$



2. Sacando factor común cuando sea posible e identificando productos de binomios, factoriza los siguientes polinomios:

a)  $A(x) = x^2 + 4x + 4$

b)  $B(x) = x^2 - 6x + 9$

c)  $C(x) = x^2 - 1$

d)  $D(x) = x^3 - 4x$

e)  $E(x) = 4x^2 + 12x + 9$

f)  $F(x) = x^2 - 9$

g)  $G(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2$

h)  $H(x) = 9x^2 + 24x + 16$

**2. UN CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR  $x - a$**

La división  $(2x^3 - 8x^2 - 31x + 42) : (x - 6)$ , es exacta. Vamos a comprobar mediante la regla de Ruffini

	2	-8	-31	42
6		12	24	$6 \cdot (-7)$
	2	4	-7	0

Para que sea exacta, el término independiente del dividendo ha de ser múltiplo de 6

De esta manera obtenemos un criterio de divisibilidad de un polinomio por  $x - a$ , para valores enteros de  $a$ , es decir será una división exacta **cuando el término independiente del dividendo sea múltiplo de  $a$ .**

Por tanto, para buscar expresiones  $x - a$  que sean divisores de un polinomio, probaremos con los valores de  $a$  (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente.

✓ Ejercicio resuelto:

a) Explicar por qué el polinomio  $P(x) = x^3 - 3x + 2$  no puede ser divisible por  $x - 3$ .

b) Indicar qué expresiones del tipo  $x - a$  podríamos considerar como posibles divisores de  $P(x)$

c) Comprobar, realizando la división, cuáles de las expresiones consideradas en b) son divisores de  $P(x)$ .

a)  $P(x)$ , no puede ser divisible entre  $x - 3$ , ya que 2 no es múltiplo de 3

b) Los divisores de 2 son 1, -1, 2, -2. Por tanto podríamos considerar como posibles divisores de  $P(x)$  las expresiones siguientes:

$$x - 1, \quad x + 1, \quad x - 2, \quad x + 2$$

c) Comprobando por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x - 1$ , si es divisor de  $P(x)$  ya que el resto es 0

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 4 \end{array}$$

$x + 1$  no es divisor de  $P(x)$  ya que el resto no es 0

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

$x - 2$  no es divisor de  $P(x)$  ya que el resto no es 0

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$x + 2$  si es divisor de  $P(x)$  ya que el resto es 0



3. a ) Explica por qué  $A(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  no puede ser divisible por  $x - 2$ .

b) Indica qué expresiones del tipo  $x - a$  podemos considerar como posibles divisores de  $A(x)$ .

c) Comprueba cuáles de las expresiones consideradas en el apartado b) son divisores de  $A(x)$ . Para ello, realiza las divisiones con la regla de Ruffini

**4. VALOR DE UN POLINOMIO PARA  $x = a$**

El valor numérico de un polinomio,  $P(x)$ , para  $x = a$  es el número que se obtiene al sustituir la  $x$  por  $a$  y efectuar la operaciones indicadas. A este número se le llama  $P(a)$ .

Por ejemplo, si  $P(x) = 7x^4 - 11x^3 - 94x + 7$ , para  $x = 3$  obtenemos:

$$P(a) = 7 \cdot 3^4 - 11 \cdot 3^3 - 94 \cdot 3 + 7 = -5$$

Este valor,  $P(3) = -5$ , coincide con el resto de dividir  $P(x)$  entre  $x - 3$ .

	7	-11	0	-94	7
3		21	30	90	-12
	7	10	30	-4	<b>-5</b>

Esto ocurre siempre, y se denomina **teorema del resto**, que dice: "El valor que toma un polinomio,  $P(x)$ , cuando hacemos  $x = a$  coincide con el resto de la división.

✓ Ejercicio resuelto:

Utilizar la regla de Ruffini para calcular  $P(a)$  en los siguientes casos:

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$  para  $a = -2$  y para  $a = 2$

○ Caso  $a = -2$

	1	-4	3	4	-4
- 2		-2	12	-30	52
	1	-6	15	-26	48 → $P(-2) = 48$

○ Caso  $a = 2$ :

1	-4	3	4	-4	
2	2	-4	-2	4	
1	-2	-1	2	0	$\rightarrow P(2) = 0$



4. Calcula  $P(a)$  en los siguientes casos, utilizando la regla de Ruffini:

a)  $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 24$  para  $a = 2$ , para  $a = -5$  y para  $a = 10$

b)  $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$  para  $a = -3$ , para  $a = 1$  y para  $a = 2$

## 5. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

### 1.1 RAÍCES DE UN POLINOMIO.

**Un número  $a$  se llama raíz de un polinomio  $P(x)$  si  $P(a) = 0$**

Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación  $P(x) = 0$ . Para localizar las raíces enteras de un polinomio probaremos con los divisores (positivos y negativos) de su término independiente.

Una vez localizada una raíz,  $a$ , puesto que  $P(x)$  es divisible por  $x - a$ , podremos ponerlo así:  $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$ . Las restantes raíces las buscaremos en  $P_1(x)$ .

### 5. 2 PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO.

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) de menor grado posible.

Veamos cómo factorizar, por ejemplo,  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- Comenzamos buscando alguna de sus raíces enteras. Para ello, probamos con alguno de los divisores de 6, es decir, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

1	-2	-5	6	
-1	-1	3	2	
1	-3	-2	8	luego -1 no es raíz

1	-2	-5	6	
1	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	1 si es raíz

$$P(x) = (x - 1) (x^2 - x - 6)$$

- Ahora buscamos las raíces de  $P_1 = x^2 - x - 6$

1	-1	- 6	
- 2	- 2	6	
1	- 3	0	- 2 es raíz de $P_1(x)$ y, por tanto de $P(x)$

$$P_1(x) = (x + 2) (x - 3)$$

- Con esto ya tenemos factorizado  $P(x)$ :

$$P(x) = (x - 1) P_1(x) = (x - 1) (x + 2) (x - 3)$$



5. Factoriza los siguientes polinomios:  
(Siempre que se pueda empezar sacando factor común)

- a)  $A(x) = x^2 - 5x - 6$
- b)  $B(x) = x^5 - 5x^4 - 6x^3$
- c)  $C(x) = x^3 - x$
- d)  $D(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$
- e)  $E(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
- f)  $F(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$
- g)  $G(x) = x^3 - 3x + 2$
- h)  $H(x) = x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$
- i)  $I(x) = x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 26x^2 + 4x - 3$
- j)  $J(x) = 9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$
- k)  $K(x) = 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2$

l)  $L(x) = 4x^4 - 37x^2 + 9$

m)  $M(x) = 6x^4 + 21x^3 + 24x^2 + 9x$

n)  $N(x) = x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 31x + 30$

**ACTIVIDADES DEL TEMA**

2. Saca factor común:

a)  $9x^2 + 6x - 3$

b)  $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c)  $10x^3 - 5x^2$

d)  $x^4 - x^3 + x^2 - x$

3. Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio:

a)  $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b)  $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

c)  $49 + 14x + x^2$

d)  $x^2 + 9 - 6x$

4. Expresa como suma por diferencia los siguientes polinomios:

a)  $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$

b)  $x^2 - 1$

c)  $4x^2 - 1$

d)  $9 - x^2$

e)  $4x^2 - 1$

f)  $4x^2 - 9$



5. Saca factor común y utiliza los productos notables para descomponer los siguientes polinomios:

a)  $x^3 - 6x^2 + 9x$

b)  $4x^4 - 81x^2$

c)  $3x^3 - 27x$

d)  $x^3 - x$

e)  $x^3 + 2x^2 + x$

f)  $3x^2 + 30x + 75$

10. a) Explica, sin hacer la división, por qué el polinomio  $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  no puede ser divisible por  $x - 2$  ni por  $x + 3$

b) Indica qué expresiones del tipo  $x - a$  podríamos considerar como posibles divisores de  $P(x)$ .

c) Comprueba, haciendo la división con la regla de Ruffini, cuáles de las expresiones consideradas en el apartado b) son divisores de  $P(x)$ .

11. Utiliza la regla de Ruffini para calcular  $P(-2)$ ,  $P(3)$  y  $P(5)$ , en los casos siguientes:

a)  $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 - 1$

b)  $2x^3 - 7x^2 - 16x + 5$

c)  $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 9x$

12. Halla, para  $x = -3$  y para  $x = 4$ , el valor de los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

$Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2$

$R(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

13. Averigua cuáles de los números 0, 1, -1, 2, -2, 3 y -3

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

4. Expresa como cuadrado de un binomio o como suma por diferencia de binomios cada uno de los siguientes polinomios:

a)  $x^4 + 4x^2 + 4$

b)  $x^2 - 16$

c)  $9x^2 - 6x^3 + x^4$

15. Descompón en factores utilizando los productos notables y sacando factor común cuando se pueda:

a)  $x^2 - 25$

b)  $9 - x^2$

c)  $x^3 + 4x$

d)  $x^2 - 12x + 36$

e)  $x^2 + 4x + 4$

f)  $x^4 - 1$

g)  $x^4 - 9x^2$

16. Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a)  $x^2 + 8x - 9$

b)  $x^3 - x^2 + 9x - 9$

c)  $x^4 + x^2 - 20$

d)  $x^3 + x^2 - 5x - 5$

e)  $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18$

g)  $x^4 - 81$

17. Descompón en factores:

a)  $x^4 - x^2$

b)  $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

c)  $2x^3 - 3x^2$

d)  $x^3 - x^2 - 12x$

e)  $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

f)  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

18. Factoriza los siguientes polinomios:

a)  $x^2 - 6x - 7$

b)  $4x^2 + 8x - 12$

c)  $x^2 + 12x + 35$

d)  $2x^3 + 2x^2 - 24x$

e)  $x^4 + 9x^3 - 10x$

f)  $3x^3 - 9x^2 - 30x$

g)  $3x^2 + 2x - 8$

h)  $4x^2 + 17x + 15$

i)  $2x^2 - 9x - 5$

j)  $-x^2 + 17x - 72$

k)  $x^3 - x^2 + 4x - 4$

l)  $x^3 - x - 6$

m)  $3x^4 + 15x^2$