

## SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

**Resolución de sistemas no lineales**

Un **sistema de ecuaciones no lineal** es aquel en el que al menos una de las dos ecuaciones es de segundo grado.

Para **resolver** un sistema no lineal puede emplearse el método de sustitución, despejando en la ecuación más sencilla, la incógnita más fácil de despejar y sustituyendo su expresión en la otra ecuación.

También hay sistemas donde el método más apropiado es el de reducción.

**Ejemplos:**

$$1) \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de sustitución.

Despejamos la variable  $y$  en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left. \begin{array}{l} y = 5 - x \\ x^2 - y^2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - (5 - x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - (25 + x^2 - 10x) = 5 \Rightarrow 10x - 25 = 5 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5 - 3 = 2$$

La solución es  $x = 3$  e  $y = 2$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x^2 - 3y^2 = 2 \end{cases}$$

En este caso, para evitar trabajar con ecuaciones irracionales vamos a aplicar el método de reducción:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 3 \\ 2x^2 - 3y^2 = 2 \end{cases}$$

$$5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Sustituyendo en la primera ecuación, calculamos el valor de la segunda variable:

$$1 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Las soluciones son:  $x_1 = 1, y_1 = 0$  ;  $x_2 = -1, y_2 = 0$

$$3) \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de sustitución.

Despejamos la variable  $y$  en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$y = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 + 4 = 5x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación bicuadrada son:  $z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} z_1 = 4 \Rightarrow x_1 = \pm 2 \Rightarrow y_1 = \pm 1 \\ z_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \pm 1 \Rightarrow y_2 = \pm 2 \end{cases}$$

Las soluciones son:  $x_1 = \pm 2, y_1 = \pm 1$  ;  $x_2 = \pm 1, y_2 = \pm 2$

## Actividades propuestas

Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

1) 
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 109 \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} xy = 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - 7y = 50 \end{cases}$$

7) 
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 - y^2 = 85 \end{cases}$$

8) 
$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 8x = y^2 \end{cases}$$

9) 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

10) 
$$\begin{cases} xy = 90 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

11) 
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164 \end{cases}$$

12) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

13) 
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

14) 
$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

15) 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x^2 + y^2 = 74 \end{cases}$$

16) 
$$\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 3 \\ 3x^2 + 2y^2 = 14 \end{cases}$$

Soluciones:
**Resuelve los siguientes sistemas no lineales:**

1) 
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} \quad \text{Solución: } \boxed{x = 3, y = 2}$$

$$x = y + 1$$

$$(y + 1)^2 - y^2 = 5 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 - y^2 = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3$$

2) 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2y - x = 2 \end{cases} \quad \text{Solución: } \boxed{\begin{matrix} x_1 = 3, y_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{3}, y_2 = -\frac{8}{3} \end{matrix}}$$

$$x = 2y - 2$$

$$(2y - 2)^2 - y^2 = 7 \Rightarrow 4y^2 - 8y + 4 - y^2 = 7 \Rightarrow 3y^2 - 8y - 3 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 10}{6} = \begin{cases} y_1 = \frac{8+10}{6} = 3 \Rightarrow x_1 = 6 - 2 = 4 \\ y_2 = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3} - 2 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 109 \end{cases} \quad \text{Solución: } \boxed{\begin{matrix} x_1 = 3, y_1 = 10 \\ x_2 = 10, y_2 = 3 \end{matrix}}$$

$$x = 13 - y$$

$$(13 - y)^2 + y^2 = 109 \Rightarrow 169 - 26y + y^2 + y^2 = 109 \Rightarrow 2y^2 - 26y + 60 = 0 \Rightarrow y^2 - 13y + 30 = 0$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 7}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{13+7}{2} = 10 \Rightarrow x_1 = 13 - 10 = 3 \\ y_2 = \frac{13-7}{2} = 3 \Rightarrow x_2 = 13 - 3 = 10 \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad \text{Solución: } \boxed{\begin{matrix} x_1 = 3, y_1 = 4 \\ x_2 = 4, y_2 = 3 \end{matrix}}$$

$$x = 7 - y$$

$$(7 - y)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 49 - 14y + y^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2y^2 - 14y + 24 = 0 \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{7+1}{2} = 4 \Rightarrow x_1 = 7 - 4 = 3 \\ y_2 = \frac{7-1}{2} = 3 \Rightarrow x_2 = 7 - 3 = 4 \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} xy = 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{Solución: } \boxed{\begin{matrix} x_1 = 3, y_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{8}{3}, y_2 = -\frac{9}{2} \end{matrix}}$$

$$x = \frac{1+2y}{3}$$

$$\frac{1+2y}{3} \cdot y = 12 \Rightarrow y(1+2y) = 36 \Rightarrow 2y^2 + y - 36 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 17}{4} = \begin{cases} y_1 = \frac{-1+17}{4} = 4 \Rightarrow x_1 = 3 \\ y_2 = \frac{-1-17}{4} = -\frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - 7y = 50 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = -6, y_1 = -8 \\ x_2 = 8, y_2 = -6 \end{cases}$$

$$x = 7y + 50$$

$$(7y + 50)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 49y^2 + 700y + 2500 + y^2 = 100 \Rightarrow 50y^2 + 700y + 2400 = 0 \Rightarrow y^2 + 14y + 48 = 0$$

$$(y + 8)(y + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -8 \Rightarrow x_1 = -6 \\ y_2 = -6 \Rightarrow x_2 = 8 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 - y^2 = 85 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x = 11, y = 6 \end{cases}$$

$$x = 5 + y$$

$$(5 + y)^2 - y^2 = 85 \Rightarrow 25 + y^2 + 10y - y^2 = 85 \Rightarrow 10y = 60 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 11$$

$$8) \begin{cases} 2x - y = 8 \\ 8x = y^2 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 8, y_1 = 8 \\ x_2 = 2, y_2 = -4 \end{cases}$$

$$y = 2x - 8$$

$$8x = (2x - 8)^2 \Rightarrow 8x = 4x^2 - 32x + 64 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 40x + 64 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x - 8)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \Rightarrow y_1 = 16 - 8 = 8 \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 4 - 8 = -4 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 3, y_1 = \pm 1 \\ x_2 = -3, y_2 = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{8}{10} \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{2x^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{4}{5} \cdot 2x^2 = \frac{8}{5}x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{8}{5}x^2 \Rightarrow -y^2 = \frac{3}{5}x^2 \Rightarrow y^2 = -\frac{3}{5}x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{5}x^2 = 10 \Rightarrow \frac{2}{5}x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$\Rightarrow y^2 = -\frac{3}{5} \cdot 25 = -15 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-15}$$

$$10) \begin{cases} xy = 90 \\ x - y = 9 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 15, y_1 = 6 \\ x_2 = -6, y_2 = -15 \end{cases}$$

$$x = 9 + y$$

$$(9 + y) \cdot y = 90 \Rightarrow y^2 + 9y - 90 = 0 \Rightarrow y = \frac{-9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90)}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 21}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{-9 + 21}{2} = 6 \Rightarrow x_1 = 15 \\ y_2 = \frac{-9 - 21}{2} = -15 \Rightarrow x_2 = -6 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 10, y_1 = 8 \\ x_2 = -8, y_2 = -10 \end{cases}$$

$$x = 2 + y$$

$$(2 + y)^2 + y^2 = 164 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 = 164 \Rightarrow 2y^2 + 4y - 160 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y - 80 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-80)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 18}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{-2 + 18}{2} = 8 \Rightarrow x_1 = 10 \\ y_2 = \frac{-2 - 18}{2} = -10 \Rightarrow x_2 = -8 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = \pm 2, y_1 = \pm 3 \\ x_2 = \pm 3, y_2 = \pm 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{6}{y}$$

$$\left(\frac{6}{y}\right)^2 + y^2 = 13 \Rightarrow \frac{36}{y^2} + y^2 = 13 \Rightarrow y^4 - 13y^2 + 36 = 0 \Rightarrow (y^2 - 9)(y^2 - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y_1 = \pm 3 \Rightarrow x_1 = \pm 2 \\ y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y_2 = \pm 2 \Rightarrow x_2 = \pm 3 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{Solución: } \boxed{x = 3, y = 1}$$

$$x = 2 + y$$

$$(2 + y)^2 - y^2 = 8 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 - y^2 = 8 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3$$

$$14) \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 2, y_1 = 3 \\ x_2 = 3, y_2 = 2 \end{cases}$$

$$x = 5 - y$$

$$(5 - y)y = 6 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \Rightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x^2 + y^2 = 74 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 7, y_1 = \pm 5 \\ x_2 = -7, y_2 = \pm 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x^2 + y^2 = 74 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow y^2 = 74 - 49 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$$

$$2x^2 = 98$$

$$16) \begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 3 \\ 3x^2 + 2y^2 = 14 \end{cases} \quad \text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 2, y_1 = \pm 1 \\ x_2 = -2, y_2 = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 3 \\ 3x^2 + 2y^2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x^2 + 15y^2 = -9 \\ 6x^2 + 4y^2 = 28 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow 2x^2 = 3 + 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$19y^2 = 19$$