SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS. RELACIÓN DE PROBLEMAS

1. **Pon un ejemplo, cuando sea posible, de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea:**

a) Compatible determinado

b) Compatible indeterminado

c) Incompatible

Justifica en cada caso tus respuestas.

2. **a) Resuelve el sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

b) Añade una ecuación al sistema anterior de modo que el sistema resultante sea:

I) Compatible determinado
II) Compatible indeterminado
III) Incompatible

3. **a) Explica si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible o incompatible:**

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 6 \\ -2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

b) ¿Podríamos conseguir que fuera compatible determinado, suprimiendo una de las ecuaciones? Razónalo.

4. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 5 \\ -x + 2y \quad\;\; = 3 \end{array}\right\}$$

Si es posible, añade una ecuación de modo que el nuevo sistema resultante sea:

a) Incompatible

b) Compatible indeterminado

Justifica tus respuestas.

5. a) Razona si los siguientes sistemas son equivalentes o no:

$$\text{I}:\begin{cases} x-3y+4z=7 \\ 3x+\quad 2z=0 \end{cases} \qquad \text{II}:\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

b) Añade una ecuación al sistema I, de modo que el nuevo sistema resultante sea incompatible. Justifica tu respuesta.

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss:

a) $\left.\begin{aligned} -3x+y+z&=1 \\ x-2y+z&=4 \\ -x+y-3z&=-7 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=3 \\ 3x+y-z&=-3 \\ x-3y+3z&=9 \\ 2x+4y-4z&=-12 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x+y-z&=6 \\ x-y+2z&=-1 \\ -x+3y\quad&=1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x-y+z+t&=0 \\ x+y+z-t&=2 \\ x-y-z+t&=2 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 5x-y+3z&=-6 \\ x+3y-z&=10 \\ 2x-y+4z&=-2 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=5 \\ 3x+2y&=1 \\ -x+4y-2z&=-9 \\ 6x+11y-3z&=-11 \end{aligned}\right\}$

g) $\left.\begin{aligned} -3x+y-z&=-4 \\ 5x-2y+z&=6 \\ -x+y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$

h) $\left.\begin{aligned} x+2y+z+t&=3 \\ -x+y\quad+2t&=-1 \\ -x+7y+2z+8t&=1 \end{aligned}\right\}$

i) $\left.\begin{aligned} 4x+y-2z&=-3 \\ 3x-y+4z&=-2 \\ -x+y+z&=5 \end{aligned}\right\}$

j) $\left.\begin{aligned} -x+y-z&=-2 \\ x-y+2z&=4 \\ x+z+t&=3 \\ x+2z+t&=1 \end{aligned}\right\}$

7. **Discute, y resuelve cuando sea posible, el sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=8 \\ 2x+2y+mz=6 \\ x+y+2z=3 \end{array}\right\}$$

8. **Dado el siguiente sistema de ecuaciones, discútelo y resuélvelo para los valores de** m **que lo hacen compatible:**

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y-17z=0 \\ x+2y+mz=5 \\ x \qquad -5z=1 \end{array}\right\}$$

9. **Discute el siguiente sistema en función del parámetro** a**, y resuélvelo cuando sea posible:**

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5y+(a+5)z=0 \\ 3x+3y \qquad -z=0 \\ 3x+4y \qquad +6z=0 \end{array}\right\}$$

10. **Discute en función del parámetro, y resuelve cuando sea posible:**

$$\left.\begin{array}{l} x+5y-6z=19 \\ 3x-6y+az=-16 \\ x \qquad -z=1 \end{array}\right\}$$

11. **Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10% de descuento.**

12. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B **y** C**. El primer lingote contiene 20 g del metal** A, **20 g del** B **y 60 del** C**. El segundo contiene 10 g de** A, **40 g de** B **y 50 g de** C**. El tercero contiene 20 g de** A, **40 g de** B **y 40 g de** C**. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de** A, **35 g de** B **y 50 g de** C**.**

¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

13. En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de

hombres.

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

14. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

15. Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de cada uno de estos tipos necesitó la utilización de ciertas unidades de madera, plástico y aluminio tal y como se indica en la tabla siguiente. La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

16. Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €.
¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?

17. Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue m veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C.
a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad invertida en cada empresa.
b) Prueba que si $m > 0$, el sistema es compatible determinado.
c) Halla la solución para $m = 5$.

18. Una cuadrilla de cinco jardineros debía podar una plantación trabajando de lunes a viernes. Cada día, cuatro podaban y el otro les ayudaba. Cada jardinero podó el mismo número de árboles cada día.
Los resultados de la poda fueron: lunes, 35 árboles podados; martes, 36; miércoles, 38; jueves, 39, y el viernes no sabemos si fueron 36 ó 38.
Calcula cuántos árboles diarios podó cada uno, sabiendo que fueron números enteros y que ninguno podó los cinco días.

SOLUCIONES:

1. a) Si el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas, no puede ser compatible determinado; con solo dos datos (ecuaciones) no podemos averiguar tres incógnitas.

b) Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x \qquad -z=1 \end{array}\right\} \text{ tiene infinitas soluciones, que serían de la forma:}$$

$x=1+\lambda,\ \ y=2-2\lambda,\ \ z=\lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Tendrían que ser dos ecuaciones contradictorias. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{ es incompatible; no se pueden dar las dos ecuaciones a la vez.}$$

2. a) $\left.\begin{array}{r} -x+y=1 \\ 3x-y=1 \end{array}\right\}$ Sumando: $2x=2 \rightarrow x=1$
Sustituyendo $x=1$ en la 1^{a} ecuación: $-1+y=1 \rightarrow y=2$

La solución del sistema es $x = 1,\ y = 2$.

b) I) Si añadimos una ecuación que sea combinación lineal de las dos que tenemos, el nuevo sistema seguirá siendo compatible determinado. La nueva recta pasaría también por (1, 2). La solución del sistema seguirá siendo la misma. Por ejemplo, si sumamos las dos ecuaciones que tenemos, obtenemos $2x = 2$.

Añadiendo esta ecuación, seguirá siendo compatible determinado (y con la misma solución).

II) Es imposible, pues las dos rectas que tenemos solo tienen en común el punto (1, 2). Añadiendo otra ecuación no podemos conseguir que estas dos rectas se corten en más puntos.

III) Para que fuera incompatible, tendríamos que añadir una ecuación que contradijera las dos que tenemos; es decir, de la forma:

$a(-x+y)+b(3x-y)=k,$ con $k \neq a+b$

Por ejemplo, con $a = 1$, $b = 1$: $2x = 3$

Añadiendo esta ecuación, obtendríamos un sistema incompatible.

3. a) Observamos que la tercera ecuación es suma de las dos primeras, salvo en el término independiente que, en lugar de un 9, es un 1. Por tanto, la tercera ecuación contradice las dos primeras. El sistema es incompatible.

b) No. Si suprimimos una de las ecuaciones, obtendremos un sistema con tres incógnitas y solo dos ecuaciones. Este nuevo sistema podría ser compatible indeterminado (en este caso lo sería), pero no compatible determinado.

4. a) Una ecuación que haga el sistema incompatible ha de ser de la forma:

$a(2x-y+z)+b(-x+2y)=k,$ con $k \neq 5a+3b$

Si tomamos, por ejemplo, $a=1$, $b=1$, tenemos:

$$x+y+z=4$$

Añadiendo esta ecuación, el sistema es incompatible.

b) Para que sea compatible indeterminado, la ecuación que añadamos será de la forma:

$a(2x-y+z)+b(-x+2y)=5a+3b$ (una combinación lineal de las dos que tenemos)

Si tomamos, por ejemplo, $a=1$, $b=1$, quedará:

$x+y+z=8$

Añadiendo esta ecuación, el sistema es compatible indeterminado.

5. a) El segundo sistema es compatible determinado. Tiene como única solución (–2, 1, 3), que también es solución del sistema I.

Sin embargo, el sistema I tiene, además de (–2, 1, 3), infinitas soluciones más, es compatible indeterminado. Por tanto, los dos sistemas no son equivalentes.

b) Para que sea incompatible, debemos añadir una ecuación de la forma:

$a(x-3y+4z)+b(3x+2z)=k,$ con $k \neq 7a$

Por ejemplo, si tomamos $a=1$, $b=1$:

$4x-3y+6z=3$

Añadiendo esta ecuación, el nuevo sistema es incompatible.

6. a) x=0, y=-1 , z=2
b) x=0, y=-3+λ , z=λ
c) x=2, y=1 , z=-1
d) x=2, y=1+λ , z=-1 , t=λ
e) x=-1, y=4 , z=1
f) x= $\frac{11}{7}-\frac{2}{7}\lambda$, y= $-\frac{13}{7}+\frac{3}{7}\lambda$, z= λ
g) x=2, y=2 , z=0
h) Sistema incompatible.
i) x=-1, y=3 , z=1
j) Sistema incompatible.

7. Para cada valor de $m \neq 4$, tenemos un sistema diferente (hay infinitos sistemas). Cada uno de ellos tiene como solución única (1, 2, 0).

8. Para cada valor de $m \neq 9$, tendríamos un sistema de ecuaciones diferente (hay infinitos sistemas). Cada uno de ellos tiene como solución única (1, 2, 0).

9.

- Si $3a + 164 = 0$, es decir, si $a = \frac{-164}{3}$, el sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \\ y + 7z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Pasamos la } z \text{ al } 2^{\underline{o}} \text{ miembro:}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3y &= z \\ y &= -7z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x = \frac{z - 3y}{3} = \frac{z + 21z}{3} = \frac{22z}{3} \\ &y = -7z \end{aligned}$$

Sería compatible indeterminado, con soluciones:

$$x = \frac{22}{3}\lambda, \quad y = -7\lambda, \quad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si $a \neq \frac{-164}{3}$, sería compatible determinado. Su única solución sería $(0,\ 0,\ 0)$.

10.

- Si $5^a - 15 = 0$, es decir, si $a = 3$, la 3ª ecuación quedará $0z = 13$, que es imposible.

Por tanto, sería incompatible.

- Si $a \neq 3$, el sistema sería compatible determinado. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x - z &= 1 \\ 5y - 5z &= 18 \\ (5a - 15)z &= 13 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x = 1 + z = 1 + \frac{13}{5a - 15} = \frac{5a - 15 + 13}{5a - 15} = \frac{5a - 2}{5a - 15} \\ &5y = 18 + 5z = 18 + 5 \cdot \frac{13}{5(a - 3)} = 18 + \frac{13}{a - 3} = \frac{18a - 54 + 13}{a - 3} = \frac{18a - 41}{a - 3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{18a - 41}{5a - 15} \\ &z = \frac{13}{5a - 15} \end{aligned}$$

Para cada valor de $a \neq 3$, tenemos un sistema diferente (hay infinitos sistemas). Cada uno de ellos tiene como solución única:

$$x = \frac{5a - 2}{5a - 15}, \quad y = \frac{18a - 41}{5a - 15}, \quad z = \frac{13}{5a - 15}$$

11. El rotulador marcaba 1,80 euros, el cuaderno, 0,90 euros y, la carpeta, 1,26 euros.

12. Habrá que coger 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero.

13. Hay 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.

14. Se compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

15. Se fabricaron 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

16. El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en segundo lugar tenía 21 € y el que perdió en tercer lugar tenía 12 €.

17. Para m=5, las cantidades invertidas respectivamente en A, B y C fueron 20000, 30000 y 10000 euros.

18. El jardinero que descansa el lunes poda 11 árboles; el que descansa el martes, 10; el que descansa el miércoles, 8; el que descansa el jueves, 7, y el que descansa el viernes, 10.