5 Inecuaciones y sistemas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Ordena de menor a mayor los siguientes números.

a) $\frac{11}{4}$, $\frac{68}{25}$, $\frac{14}{5}$ y $\frac{27}{10}$

b) $0,1\widehat{2}$, $\frac{11}{90}$, $\frac{3}{25}$ y $0,12$

a) $\frac{11}{4}=\frac{275}{100}$ $\quad \frac{68}{25}=\frac{272}{100}$ $\quad \frac{14}{5}=\frac{280}{100}$ y $\frac{27}{10}=\frac{270}{100} \Rightarrow \frac{27}{10}<\frac{68}{25}<\frac{11}{4}<\frac{14}{5}$

b) $0,1\widehat{2}=\frac{11}{90}=\frac{55}{450}$ $\quad 0,12=\frac{3}{25}=\frac{54}{450} \Rightarrow 0,12=\frac{3}{25}<\frac{11}{90}=0,1\widehat{2}$

5. Comprueba en cada caso si el valor indicado forma parte de la solución de la inecuación.

a) $x=-2$ de la inecuación $x^3+x^2+x\le 6$

b) $x=-\frac{1}{2}$ de la inecuación $2(x-2)+\frac{x-1}{3}>x-1$

a) $(-2)^3+(-2)^2+(-2)=-8+4-2=-6\le 6 \Rightarrow$ Sí pertenece a la solución.

b) $\left.\begin{array}{l} 2\left(-\frac{1}{2}-2\right)+\frac{-\frac{1}{2}-1}{3}=-5-\frac{1}{2}=-\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{11}{2}<-\frac{3}{2} \Rightarrow$ No pertenece a la solución.

6. Resuelve las inecuaciones lineales siguientes.

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2}$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6}$

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2}$

d) $2(-10x-3)-\frac{3}{7}(2x-5)+x\le -2(x-5)-\frac{222}{7}$

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2} \Rightarrow 4x-12-x+2\le 4x \Rightarrow -x\le 10 \Rightarrow x\ge -10 \Rightarrow$ Solución: $[-10,+\infty)$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6} \Rightarrow 12x-18-3x>6x+3x+1 \Rightarrow 0x>19 \Rightarrow$ Solución: $\varnothing$

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2} \Rightarrow 2x+4x+4+6x+12<x+38 \Rightarrow 11x<22 \Rightarrow x<2 \Rightarrow$ Solución: $(-\infty, 2)$

d) $2(-10x-3)-\frac{3}{7}(2x-5)+x\le -2(x-5)-\frac{222}{7} \Rightarrow 14(-10x-3)-3(2x-5)+7x\le -14(x-5)-222 \Rightarrow$

$\Rightarrow -140x-42-6x+15+7x\le -14x+70-222 \Rightarrow -125x\le -125 \Rightarrow 125x\ge 125 \Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow$ Solución: $[1,+\infty)$

7. Ejercicio resuelto.

8. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 2 \geq 0$ **c)** $-x^2 - 1 > 0$ **e)** $\frac{2}{3}x^2 + 4x < 2x$

b) $4 - x^2 < 0$ **d)** $3x^2 - x \geq x^2 - 5x$ **f)** $-x^2 - 2x - 1 > 0$

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $(2 - x)(2 + x) < 0 \Rightarrow -(x - 2)(x + 2) < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) $x \in \varnothing$

d) $2x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow 2x(x + 2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

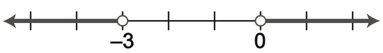
e) $2x^2 + 12x - 6x < 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x < 0 \Rightarrow 2x(x + 3) < 0 \Rightarrow x \in (-3, 0)$

f) $-(x + 1)^2 > 0 \Rightarrow (x + 1)^2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

9. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones:

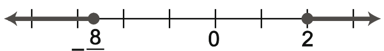
a) $3x(1 + x) - 2(x^2 - 1) > 2$ **b)** $x^2 - \frac{3}{2}x \leq 1$ **c)** $\frac{x^2}{2} + \frac{x+1}{3} \geq 3$

a) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$



b) $\left[\frac{-1}{2}, 2\right]$

c) $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right] \cup [2, +\infty)$



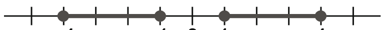
10. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa las soluciones.

a) $x^3 - 6x^2 + 7x + 15 \geq x^2$ **b)** $x^3 - 3x^2 < 1 - 3x$ **c)** $x^4 - 17x^2 \leq -16$

a) $[-1, 3] \cup [5, +\infty)$

b) $(-\infty, 1)$

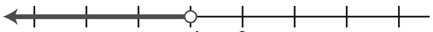
c) $[-4, -1] \cup [1, 4]$



11. Representa en la recta real las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{4x - 5}{4x^2 - x - 5} < 0$ **b)** $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \geq 0$ **c)** $1 > \frac{2x}{x^2 + 1}$

a) $\frac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0 \Rightarrow \frac{4x-5}{(4x-5)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1)$



b) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

$(-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$

$-\infty$ –2 –1 1 2 $+\infty$

$x + 1$	–	–	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	–	+
$x - 1$	–	–	–	+	+
$x + 2$	–	+	+	+	+
$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$	+	–	+	–	+

c) $1 > \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 > 2x \Rightarrow (x - 1)^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

12. Ejercicio interactivo.

13 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 2x+1<x+2 \\ 3x-1\le 4x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4>x \\ x\ge 2x-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x-1<2x-(1+x) \\ 3(x+2)\ge 2(x-4) \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x\le 6 \\ 3-x>2(x-4) \\ 5x+3>-(x-1) \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+1<x+2 \\ 3x-1\le 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow [-1,1)$

c) $\begin{cases} 3x-1<x-1 \\ 3x+6\ge 2x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x\ge -14 \end{cases} \Rightarrow [-14,0)$

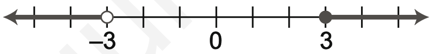
b) $\begin{cases} 3x-4>x \\ x\ge 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>4 \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le 1 \end{cases}$ No tiene solución

d) $\begin{cases} x\le 6 \\ -3x>-11 \\ 6x>-2 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{11}{3}\right)$

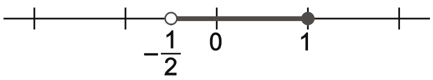
19. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa las soluciones.

a) $\begin{cases} -2x^2+4x+6\le 0 \\ 3x^2+6x-9>0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}>x-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{4}\le 1 \\ 2x-3<3x-2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -2x^2+4x+6\le 0 \\ 3x^2+6x-9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)\ge 0 \\ (x+3)(x-1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty) \\ x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup[3,+\infty)$



b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}>x-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{4}\le 1 \\ 2x-3<3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-2x>4x-1 \\ 2x+2+x-1\le 4 \\ 2x-3x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>-1 \\ 3x\le 3 \\ -x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x\le 1 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2},1\right]$



20. Ejercicio resuelto.

21. Representa los semiplanos formados por las soluciones de las siguientes inecuaciones.

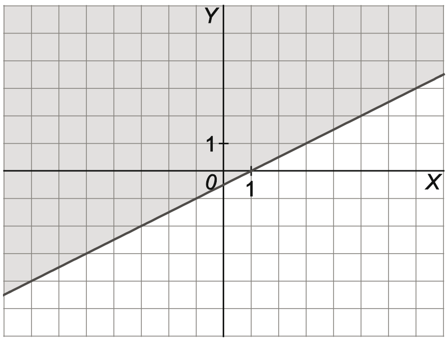
a) $x - 2y < 1$

b) $3x + y \geq 2$

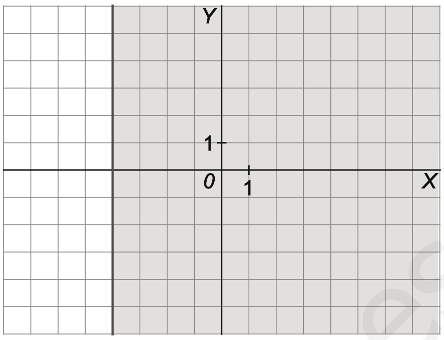
c) $x - 3y \leq 2x + 4 - 3y$

d) $5x + 3y + 10 < 2x + 2$

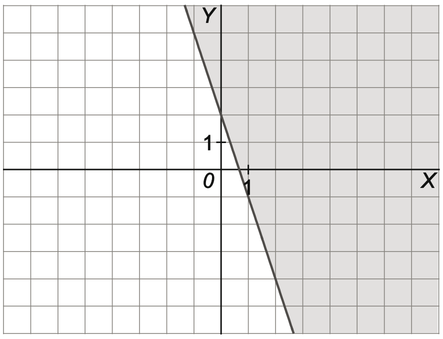
a)



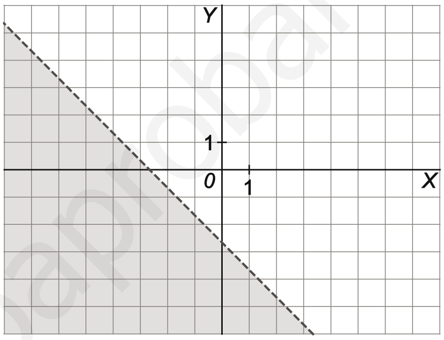
c)



b)

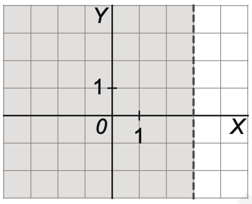


d)

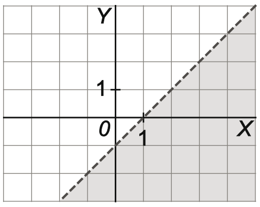


22. Escribe en cada apartado una inecuación de la que sea solución el semiplano representado.

a)



b)



a) Respuesta abierta. $x < 3$

b) Respuesta abierta. $y < x - 1$

23. Expresa mediante un sistema de inecuaciones los siguientes subconjuntos del plano.

a) Puntos pertenecientes al segundo cuadrante.

b) Puntos con ordenada positiva que están por encima de la bisectriz del primer cuadrante.

a) Respuesta abierta. $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

b) Respuesta abierta. $\begin{cases} y > 0 \\ y > x \end{cases}$

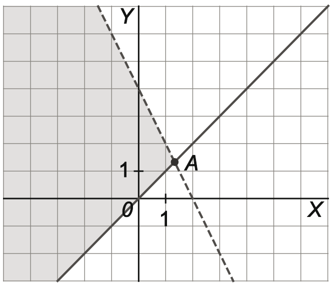
24. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} y < -2x + 4 \\ y \geq x \end{cases}$

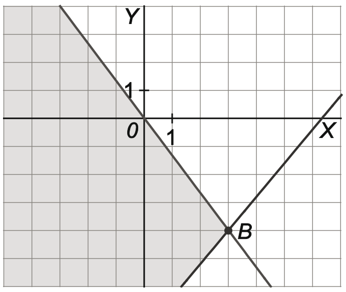
b) $\begin{cases} 6x - 5y \leq 38 \\ 4x + 3y \leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \\ 2x + y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$

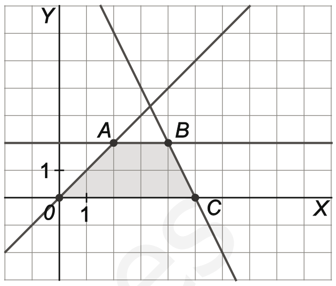
a)



b)



c)



$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\begin{cases} 6x - 5y \leq 38 \\ 4x + 3y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow B(3, -4)$

$\begin{cases} y = x \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2,2);\ \begin{cases} 2x + y = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4,2)$

$\begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(5,0);\ O(0,0)$

25. Ejercicio interactivo.

26. Ejercicio resuelto.

27. En la población de un territorio se han producido, en un período de tiempo determinado, las siguientes variaciones medidas sobre la población inicial:

- **2,5 % de nacimientos**
- **0,5 % de emigrantes**
- **2,25% de defunciones**
- **0,75 % de inmigrantes**

¿Entre qué valores estará la población final si la inicial estaba entre 45000 y 46000 habitantes?

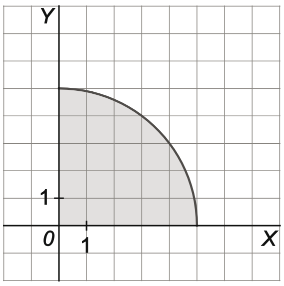
Sea x la población inicial: entonces $45\,000 < x < 46\,000$.

Nos piden entre qué valores estará: $P = x + 0{,}025x - 0{,}0225x - 0{,}005x + 0{,}0075x = 1{,}005x$.

Entonces tendremos que $45\,000 \cdot 1{,}005 < P < 46\,000 \cdot 1{,}005$, es decir, $45\,225 < P < 46\,230$.

28. Determina y representa la región del plano cuyos puntos son interiores a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 5 y que están situados en el primer cuadrante.

$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



29. En la fabricación de un hectómetro de cable del tipo *A* se utilizan 16 kg de plástico y 4 kg de cobre, y en la de un hectómetro de cable de tipo *B*, 6 kg de plástico y 12 kg de cobre. Representa gráficamente las posibilidades de producción si se debe fabricar más cable de tipo *A* que de tipo *B* y se cuenta con 252 kg de plástico y 168 kg de cobre.

x hm de cable de tipo *A*, *y* hm de cable de tipo *B*

Material	Plástico	Cobre
Tipo *A*	16	4
Tipo *B*	6	12

$$\begin{cases} 16x + 6y \le 252 \\ 4x + 12y \le 168 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 3y \le 126 \\ x + 3y \le 42 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

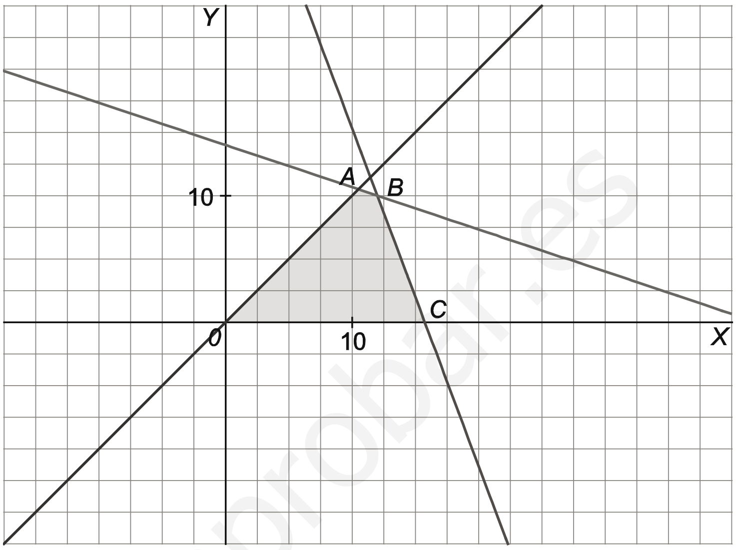
Vértices:

$$A \equiv \begin{cases} y = x \\ x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow A(10{,}5;10{,}5)$$

$$B \equiv \begin{cases} 8x + 3y = 126 \\ x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow B(12{,}10)$$

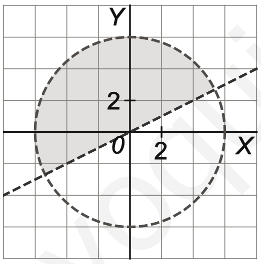
$$C \equiv \begin{cases} 8x + 3y = 126 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(15{,}75;\ 0)$$

$O(0{,}0)$



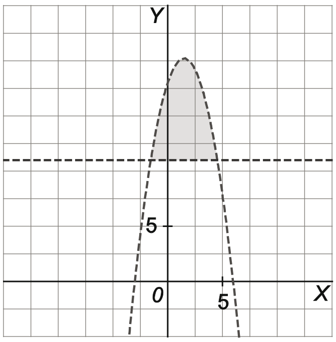
30. Determina y representa los puntos del interior del círculo de centro el origen de coordenadas y radio 6, cuya abscisa es menor que el doble de su ordenada.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x<2y \end{cases}$$



31. Determina las inecuaciones que cumplen los puntos (x, y) del interior de la región delimitada por la parábola $y = -x^2 + 3x + 18$ y la recta $y = 11$.

$$\begin{cases} y < -x^2 + 3x + 18 \\ y>11 \end{cases}$$



32 a 39. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Inecuaciones lineales y polinómicas

40. Indica si los números –10, –1, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{5}$, 0, $\frac{3}{5}$, 1 y 5 son soluciones de la inecuación $\frac{8}{3}x+2\geq 0$.

Basta sustituir cada número en la expresión y comprobar si se verifica la desigualdad.

No son solución: –10, y –1. Sí lo son el resto.

41. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales, expresa las soluciones en forma de intervalo y represéntalas sobre la recta real.

a) $\frac{8}{3}x+2\geq 0$

b) $2x-\sqrt{2}\leq 0$

c) $-x+1>-\frac{10}{7}$

d) $3(2x-5)-4(x-2)\leq 2-4x$

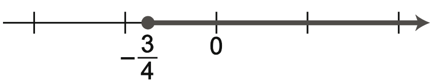
e) $2x-\frac{9x}{4}<\frac{x}{3}$

f) $\frac{x}{2}-\frac{3x}{5}<x+1$

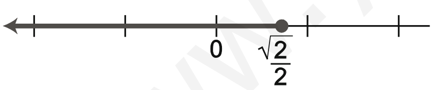
g) $\frac{x}{1-\sqrt{2}}<2$

h) $\frac{x+1}{3}-\frac{x+2}{4}+\frac{x-3}{18}\geq -\frac{8}{9}$

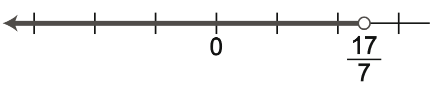
a) $\left[\frac{-3}{4},+\infty\right)$



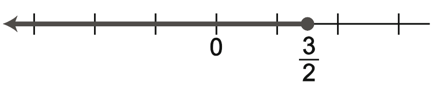
b) $\left(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$



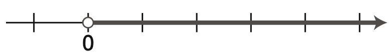
c) $\left(-\infty,\frac{17}{7}\right)$



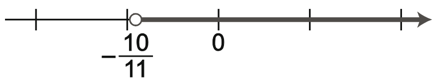
d) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$



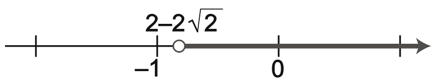
e) $(0,+\infty)$



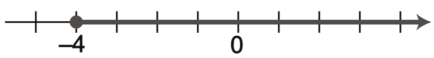
f) $\left(-\frac{10}{11},+\infty\right)$



g) $\left(2-2\sqrt{2},+\infty\right)$



h) $[-4,+\infty)$



42. Resuelve las siguientes inecuaciones con valores absolutos:

a) $|x-3|\le 5$ **c)** $|2x-8|\le 10$ **e)** $|x-3|\le -5$

b) $|x+2|<4$ **d)** $|3x+9|\le 2$ **f)** $|x+3|<-5$

a) $[-2, 8]$ **b)** $(-6, 2)$ **c)** $[-1, 9]$ **d)** $\left[-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}\right]$ **e)** $\varnothing$ **f)** $\varnothing$

43. Halla y representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2+x-12\ge 0$

b) $-2x^2+3x>0$

c) $4x^2-1\le 0$

d) $6x^2+x-1<0$

e) $-2x^2-10x-8>0$

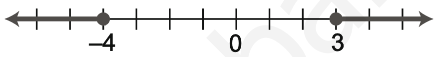
f) $2x^2+x+1<0$

g) $6-x^2\ge 0$

h) $(3x-1)(5x+2)\ge 0$

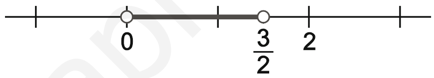
a) $x^2+x-12\ge 0$, entonces $(x+4)(x-3)\ge 0$

Solución: $(-\infty, -4]\cup[3, +\infty)$



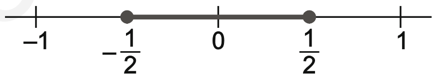
b) $-2x^2+3x>0$, entonces $x(-2x+3)>0$

Solución: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$



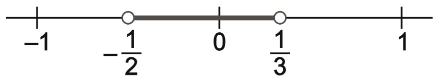
c) $4x^2-1\le 0$, entonces $x^2\le \frac{1}{4}$

Solución: $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



d) $6x^2+x-1<0$, entonces $6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$

Solución: $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right)$



e) $-2x^2-10x-8>0$, entonces $-2(x+4)(x+1)>0$

Solución: $(-4, -1)$

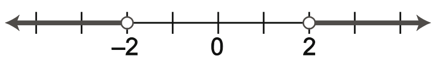
f) $2x^2+x+1<0$.

Como $2x^2+x+1=0$, no tiene soluciones reales.

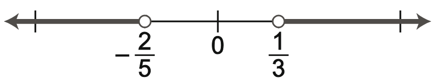
Solución: $\varnothing$

g) $-x^2<-4$, es decir, $x^2>4$.

Solución: $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$



h) Las soluciones son: $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.



44. Simplifica y resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $(x-2)^2+5\le 2x$

b) $\dfrac{3x-6}{5}<\dfrac{4x-2x^2}{10}$

c) $5x^2+1\ge\dfrac{3x^2-1}{2}$

d) $3x^2+\dfrac{5}{6}x-2x<2x^2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{2}$

e) $(x-2)^2+(x+4)(x-2)+3x\ge -1$

f) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{3x-1}{5}+x>2$

a) $(x-2)^2+5\le 2x\Rightarrow x^2-6x+9\le 0\Rightarrow (x-3)^2\le 0\Rightarrow x=3\Rightarrow\{3\}$

b) $\dfrac{3x-6}{5}<\dfrac{4x-2x^2}{10}\Rightarrow 6x-12<4x-2x^2\Rightarrow 2x^2+2x-12<0\Rightarrow 2(x-2)(x+3)<0\Rightarrow(-3,2)$

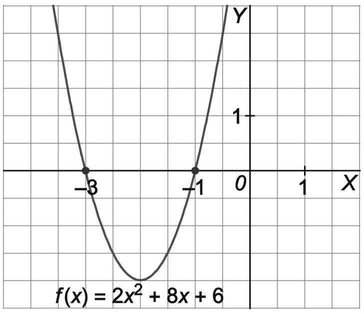
c) $5x^2+1\ge\dfrac{3x^2-1}{2}\Rightarrow 10x^2+2\ge 3x^2-1\Rightarrow 7x^2+3\ge 0\Rightarrow\mathbb{R}$

d) $3x^2+\dfrac{5}{6}x-2x<2x^2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{2}\Rightarrow x^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{2}{3}<0\Rightarrow\dfrac{1}{3}(x-2)(3x+1)<0\Rightarrow\left(-\dfrac{1}{3},2\right)$

e) $(x-2)^2+(x+4)(x-2)+3x\ge -1\Rightarrow 2x^2+x-3\ge 0\Rightarrow 2(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\ge 0\Rightarrow\left(-\infty,\dfrac{-3}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

f) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{3x-1}{5}+x>2\Rightarrow 5x^2+4x-28>0\Rightarrow 5(x-2)\left(x+\dfrac{14}{5}\right)>0\Rightarrow\left(-\infty,\dfrac{-14}{5}\right]\cup(2,+\infty)$

45. Resuelve las inecuaciones dadas observando la gráfica de la función polinómica $f(x)=2x^2+8x+6$.



a) $x^2+4x+3\le 0$

b) $-x^2-4x-3>0$

a) $[-3,-1]$

b) $(-3,-1)$

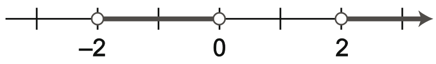
46. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^3 - 4x > 0$ **c)** $x^4 - 1 \geq 0$ **e)** $x^4 - 5x^2 \geq 36$

b) $x^3 - 3x - 2 < 0$ **d)** $x^3 - 7x + 6 < 0$ **f)** $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} < 0$

a) $x^3 - 4x > 0$, entonces $x(x - 2)(x + 2) > 0$

Solución: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



b) $x^3 - 3x - 2 < 0$, entonces $(x - 2)(x + 1)^2 < 0$

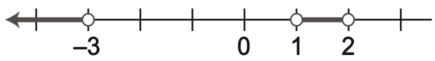
Solución: $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

c) $x^4 - 1 \geq 0$, entonces $(x^2 - 1)(x^2 + 1) \geq 0$

Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

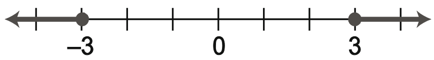
d) $x^3 - 7x + 6 < 0$, entonces $(x - 2)(x - 1)(x + 3) < 0$

Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$



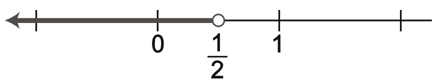
e) $x^4 - 5x^2 \geq 36$, entonces $(x^2 + 4)(x - 3)(x + 3) \geq 0$

Solución: $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



f) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} < 0$, entonces $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + 1\right) < 0$

Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$



47. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x\left(x^2+3x\right)>6x+8$

b) $2x^4-8x^3>2x-8$

c) $x^5-x^4-9x^3>12-16x-5x^2$

d) $x^2\left(x^2+1\right)+2x^3-6x>x\left(x^3-4x+1\right)$

a) $(x-2)(x+1)(x+4)>0$

$-\infty \quad -4 \quad -1 \quad 2 \quad +\infty$

$x-2$	–	–	–	+
$x+1$	–	–	+	+
$(x+4)$	–	+	+	+
$(x-2)(x+1)(x+4)$	–	+	–	+

Solución: $(-4,-1)\cup(2,+\infty)$

b) $2(x-4)(x-1)\left(x^2+x+1\right)>0$

$-\infty \quad 1 \quad 4 \quad +\infty$

$x-1$	–	+	+
$x-4$	–	–	+
x^2+x+1	+	+	+
$4(x-1)(x-4)(x^2+x+1)$	+	–	+

Solución: $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

c) $(x-3)(x-1)^2(x+2)^2>0$

$-\infty \quad -2 \quad 1 \quad 3 \quad +\infty$

$x-3$	–	–	–	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+
$(x+2)^2$	+	+	+	+
$(x-3)(x-1)^2(x+2)^2$	–	–	–	+

Solución: $(3,+\infty)$

d) $x(x-1)(2x+7)>0$

$-\infty \quad -\frac{7}{2} \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

x	–	–	+	+
$(x-1)$	–	–	–	+
$\left(x+\frac{7}{2}\right)$	–	+	+	+
$x(x-1)\left(x+\frac{7}{2}\right)$	–	+	–	+

Solución: $\left(-\frac{7}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$

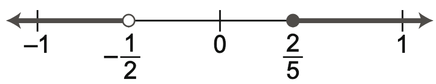
Inecuaciones racionales

48. Expresa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{5x-2}{2x+1}\geq 0$ **b)** $\frac{x^2-1}{x+2}\leq 0$ **c)** $\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}>0$ **d)** $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9}<0$

a) $\frac{5x-2}{2x+1}\geq 0$

Solución: $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

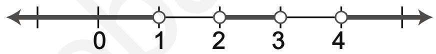


b) $\frac{x^2-1}{x+2}\leq 0\Rightarrow\frac{(x-1)(x+1)}{x+2}\leq 0$

Solución: $(-\infty, -2)\cup[-1, 1]$

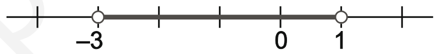
c) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}>0\Rightarrow\frac{(x-4)(x-1)}{(x-3)(x-2)}>0$

Solución: $(-\infty, 1)\cup(2, 3)\cup(4, +\infty)$



d) $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9}<0\Rightarrow\frac{(x+3)(x-1)^2}{(x-1)(x+3)^2}<0\Rightarrow\frac{x+3}{x-1}<0$

Solución: $(-3, 1)$



49. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{5x-2}{2x+1}\geq -2$ **b)** $\frac{x-1}{x+3}-1>0$ **c)** $\frac{x^2}{x-2}\leq 2$ **d)** $\frac{x^2-3}{x+3}<x$

a) $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup[0,+\infty)$ **b)** $(-\infty,-3)$ **c)** $(-\infty,\ 2)$ **d)** $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

50. Halla las soluciones de la inecuación

$$\frac{x^2-kx-2k^2}{(x+k)(x^2-k^2)}\geq 0$$

siendo *k* un número positivo.

$\frac{(x-2k)(x+k)}{(x+k)^2(x-k)}\geq 0$, de solución $(-k,k)\cup[2k,+\infty)$.

51. Sea *a* un número positivo y diferente de la unidad, demuestra que la suma de *a* con su inverso es superior a 2. Utiliza el desarrollo del cuadrado de la diferencia de un número y su inversa.

Sea *a* cualquier número estrictamente positivo y diferente de la unidad.

El cuadrado de $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$ es estrictamente positivo:

$$\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=a+\frac{1}{a}-2>0\Rightarrow a+\frac{1}{a}>2$$

Sistema de inecuaciones con una incógnita

52. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3<2x+5 \\ 3>2x+5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3<x<3 \\ x^2>1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3x-3<7 \\ 3x-x\le 6-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x<10 \\ 2x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow (-\infty,\ 2)$

b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-x<4 \\ 2x+3x-3>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{4}{3} \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{5}{4},\dfrac{4}{3}\right)$

c) $\begin{cases} -8<2x \\ -2>2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<x \\ -1>x \end{cases} \Rightarrow (-4,\ -1)$

d) $\begin{cases} x<3 \\ x>-3 \\ (x-1)(x+1)>0 \end{cases} \Rightarrow (-3,-1)\cup(1,\ 3)$

53. Halla la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ -3\le x\le 2 \\ -4\le x\le 1 \end{cases}$

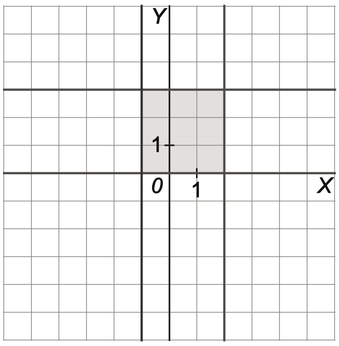
a) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9-2x\le -3 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x\le -12 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\dfrac{12}{5},\ 5\right]$

b) $\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ -3\le x\le 2 \\ -4\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow [-2,\ 1]$

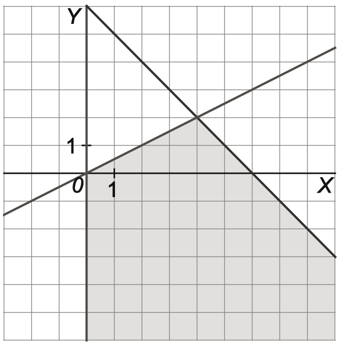
54. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 2y \leq x \\ x \geq 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x \geq y - 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \\ x + y < 6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ -3x + 4y \leq 4 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 6 \leq 0 \\ 3 \leq y \\ y \leq 5 \end{cases}$

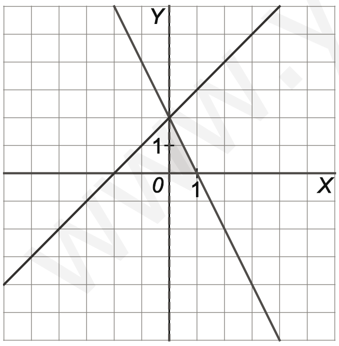
a) Vértices: (–1, 0), (–1, 3), (2, 0) y (2, 3)



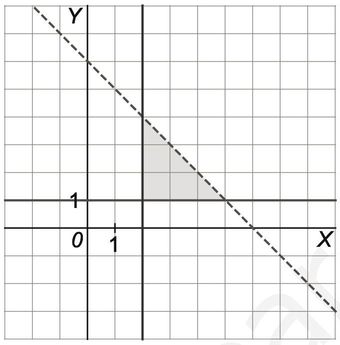
b) Vértices: (0, 0) y (4, 2)



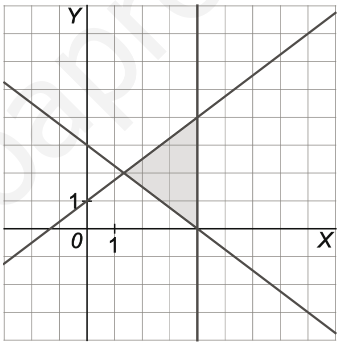
c) Vértices: (0, 0), (1, 0) y (0, 2)



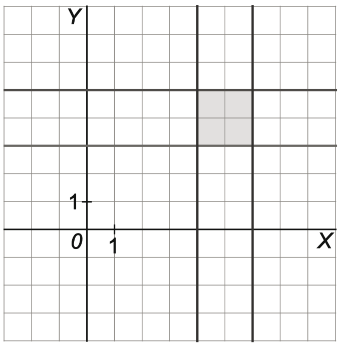
d) Vértices: (2, 1), (5, 1) y (2, 4)



e) Vértices: (4, 0), (4, 4) y $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$



f) Vértices: (4, 3), (4, 5), (6, 3) y (6, 5)



55. Halla los vértices de la región determinada por:

$$\begin{cases} 3x + y \le 12 \\ x - 2y \ge -3 \\ y > \dfrac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y \ge 1 \end{cases}$$

$A(4, 0)$, $B(3, 3)$, $C(2, -1)$ y $D(-1, 1)$

56. Escribe, para cada apartado, un sistema de inecuaciones tal que la representación gráfica de su solución sea la indicada.

a) El cuarto cuadrante del plano.

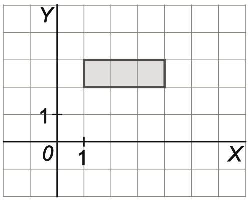
b) Un cuadrado de centro el punto (2, 1) y lado 3.

c) Un rectángulo de base 2 y altura 8 centrado en el origen.

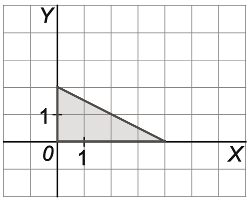
a) Respuesta abierta. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ **b)** Respuesta abierta. $\begin{cases} 0{,}5 \le x \le 3{,}5 \\ -0{,}5 \le y \le 2{,}5 \end{cases}$ **c)** Respuesta abierta. $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -4 \le y \le 4 \end{cases}$

57. Expresa mediante sistemas de inecuaciones las regiones sombreadas en las siguientes figuras.

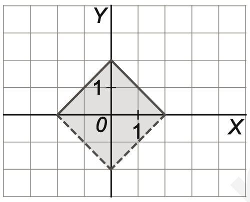
a)



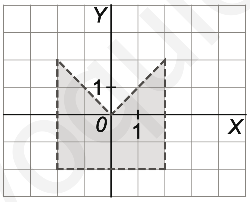
b)



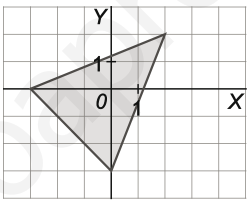
c)



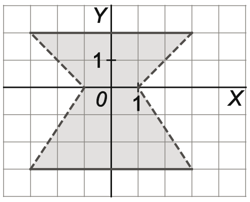
d)



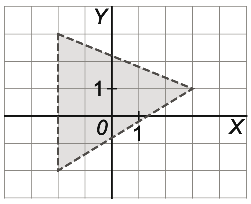
e)



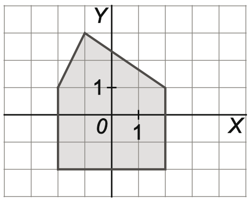
f)



g)



h)



a) $\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \le x + 2 \\ y > x - 2 \\ y \le -x + 2 \\ y > -x - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ y > -2 \\ y < -x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 2 \\ y > -2 \\ y < x \end{cases}$

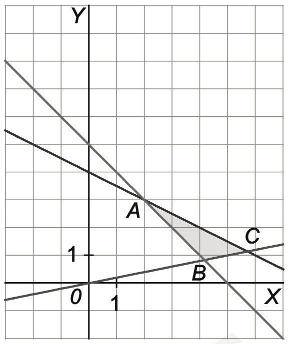
e) $\begin{cases} y \le \dfrac{2}{5}x + \dfrac{6}{5} \\ y \ge -x - 3 \\ y \ge \dfrac{5}{2}x - 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ y > -x - 1 \\ y > x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \le y < 0 \\ y < \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \\ y < -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} y < \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{11}{5} \\ x > -2 \\ y > \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5} \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ y \ge -2 \\ y \le 2x + 5 \\ y \le \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases}$

58. Considera el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+2y \le 8 \\ x+y \ge 5 \\ x-5y \le 0 \end{cases}$ **y resuélvelo gráficamente. Encuentra todas sus soluciones enteras.**



Vértices: $A(2, 3)$, $B\left(\dfrac{25}{6},\dfrac{5}{6}\right)$, $C\left(\dfrac{40}{7},\dfrac{8}{7}\right)$.

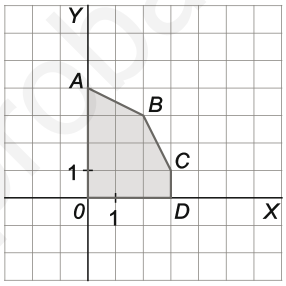
Las soluciones enteras son: (4, 2), (4, 1), (5, 1), (3, 2) y (2, 3).

59. Utilizando el desarrollo del cuadrado de una diferencia, demuestra que la media aritmética de dos números reales positivos es superior o igual a su media geométrica.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b} \ge 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

60. La figura muestra la solución del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} ax+by \le c \\ dx+ey \le f \\ y \ge 0 \\ 0 \le x \le g \end{cases}$$



Encuentra valores posibles para *a, b, c, d, e, f* y *g*.

Recta que pasa por $A(0, 4)$ y $B(2, 3)$: $ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} 4b=c \\ 2a+3b=c \end{cases} \Rightarrow 4b=2a+3b \Rightarrow b=2a$

Recta que pasa por $B(2, 3)$ y $C(3, 1)$: $dx+ey=f \Rightarrow \begin{cases} 2d+3e=f \\ 3d+e=f \end{cases} \Rightarrow 2d+3e=3d+e \Rightarrow d=2e$

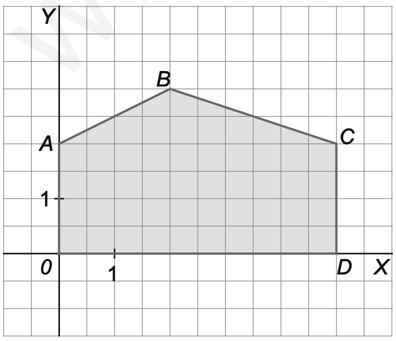
$CD \equiv x=3 \Rightarrow g=3$. Así, si por ejemplo : $a = 1$ y $e = 1$, entonces $b = 2$, $c = 8$, $d = 2$, , $f = 7$ y $g = 3$.

61. Escribe todas las posibles soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales siendo los valores de las incógnitas obligatoriamente números enteros.

a) $\begin{cases} x-2y \ge -4 \\ x+3y \le 11 \\ x \le 5 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$

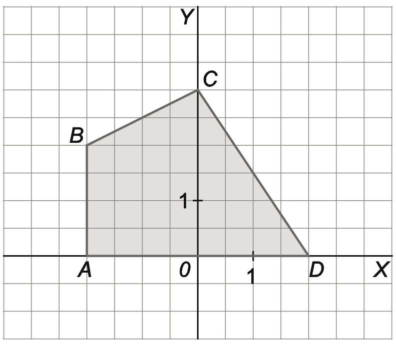
b) $\begin{cases} x-2y \ge -6 \\ 3x+2y \le 6 \\ x+2 \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

a)



(0, 0), (1, 0), (2, 0),(3, 0), (4, 0), (5, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), 4, 1), (5, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (2, 3)

b)



(–2, 0), (–1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (–2, 1), (–1, 1), (0, 1), (1, 1), (–2, 2), (–1, 2), (0, 2),(0, 3)

62. Dados dos números reales *a* y *b* tales que *a* < *b*, completa la tabla de signos y resuelve las inecuaciones.

$-\infty$ a b $+\infty$

$x-a$			
$x-b$			

a) $4(x-a)(x-b) > 0$ **c)** $(x-a)^2(x-b) < 0$

b) $-2(x-a)(x-b) \le 0$ **d)** $(x-a)^3 \ge 0$

a)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x-a$	$-$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$
$4(x-a)(x-b)$	$+$	$-$	$+$

$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

b)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x-a$	$-$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$
$-2(x-a)(x-b)$	$-$	$+$	$-$

$(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

c)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x-a$	$-$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$
$(x-a)^2(x-b)$	$-$	$-$	$+$

$(-\infty, b)$

d)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x-a$	$-$	$+$	$+$
$(x-a)^3$	$-$	$+$	$+$

$[a, +\infty)$

63. Dados los números reales *a* < *b* < *c* < *d*, completa la siguiente tabla de signos.

$-\infty$ a b c $+\infty$

$x-a$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-a)(x-b)^2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-c$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-b)}{(x-c)^2(x-a)}$	$+$	$-$	$+$	$+$

64. Aplicando las técnicas adecuadas para cada inecuación, resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x^2 + 2x - 1 \le 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x^3 - 8x^2 + 9x + 18 \ge 0 \\ \dfrac{2}{3-x} \le -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4x \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 16x + 48 \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3+x} > 0 \\ 2x^2 + 2x - 12 \le 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-3) \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \{x = 0\}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4x \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-4) \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases} \Rightarrow (-1, 0]$

c) $\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x^2 + 2x - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 16x + 48 \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

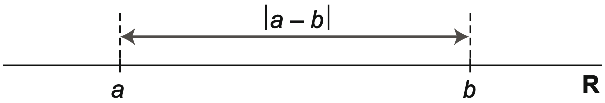
$\Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+4)(x-4) \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases} \Rightarrow [-5, -4] \cup \left[3, \dfrac{7}{2}\right)$

e) $\begin{cases} x^3 - 8x^2 + 9x + 18 \ge 0 \\ \dfrac{2}{3-x} \le -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3)(x-6) \ge 0 \\ \dfrac{x-5}{x-3} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

f) $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3+x} > 0 \\ 2x^2 + 2x - 12 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x(x^2+1)} > 0 \\ 2(x-2)(x+3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} > 0 \\ (x-2)(x+3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 2]$

65. La distancia en la recta real entre los puntos que representan a los números *a* y *b* se puede calcular mediante la expresión $d(a, b) = |a - b|$.



a) Calcula la distancia entre los números reales –2 y –6.

b) Calcula el conjunto de números reales *x* cuya distancia al punto 2 es menor o igual a 4.

c) Calcula el conjunto de números reales *x* que verifican que su distancia al punto –2 es mayor o igual a 4.

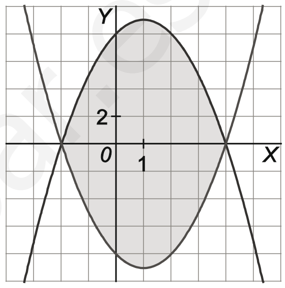
a) $d(-2,-6) = |-2-(-6)| = |-2+6| = 4$

c) $d(x,-2) = |x-(-2)| = |x+2| \geq 4 \Rightarrow x \leq -6$ o $x \geq 2 \Rightarrow (-\infty,-6] \cup [2,+\infty)$

b) $d(x,2) = |x-2| \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 6 \Rightarrow [-2,6]$

66. Escribe un sistema de inecuaciones que caracterice la región encerrada por las parábolas de la figura.

Nota: para hallar la ecuación de la parábola puedes usar la expresión $y = ax^2 + bx + c$.



$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 2x + 8 \\ y \geq x^2 - 2x - 8 \end{cases}$$

67. Calcula el conjunto de números reales tales que: $|x-2| \leq |x-6|$. Para ello:

a) Halla el punto que equidista de 2 y de 6.

b) Razona cuáles son los puntos que están más cerca de 2 que de 6.

a) El punto $x = 4$ equidista de 2 y de 6.

b) La inecuación expresa el conjunto de números reales que están más cerca de 2 que de 6. Por tanto, serán los más pequeños que 4: $(-\infty, 4]$.

Cuestiones

68. Realiza las siguientes acciones referidas a inecuaciones.

a) Escribe una inecuación de primer grado cuya solución sea todo el conjunto de los números reales.

b) Escribe una inecuación de primer grado que no tenga solución.

c) Escribe una inecuación de segundo grado cuya solución sea todo el conjunto de los números reales.

d) Escribe una inecuación de segundo grado que no tenga solución.

a) $x + 1 > x$ **b)** $x + 1 < x$ **c)** $x^2 + 1 > 0$ **d)** $x^2 + 1 < 0$

69. Efectúa las siguientes operaciones referidas a sistemas de inecuaciones.

a) Escribe un sistema de dos inecuaciones lineales con una incógnita tales que su solución sea todo el conjunto de los números reales.

b) Escribe un sistema de dos inecuaciones lineales con una incógnita que no tenga solución.

c) Escribe un sistema de dos inecuaciones de segundo grado con una incógnita tales que su solución sea todo el conjunto de los números reales.

d) Escribe un sistema de dos inecuaciones de segundo grado con una incógnita que no tenga solución.

e) Escribe un sistema de dos inecuaciones con una incógnita cuyo conjunto solución esté formado únicamente por el punto $x = 0$.

a) $\begin{cases} x+1 > x \\ x+2 > x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+1 < x \\ x+2 > x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ x^2+2 > 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ x^2+2 \leq 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$

PROBLEMAS

70. Averigua qué números naturales verifican que al sumarles los dos siguientes se obtiene un número superior a 75.

$x + x + 1 + x + 2 > 75$, entonces $3x + 3 > 75$, luego $x > 24$.

Todos los números naturales superiores a 24 verifican la propiedad.

71. ¿Entre qué medidas se debe aumentar el lado de un cuadrado que tiene por área 36 cm^2 si se quiere que la nueva superficie esté comprendida entre cuatro y nueve veces la inicial?

El lado del cuadrado inicial mide: $l = \sqrt{36} = 6$ cm.

Sea x la medida que se añade al lado del cuadrado, entonces:

$$4 \cdot 36 \le (6 + x)^2 \le 9 \cdot 36 \Rightarrow 144 \le (6 + x)^2 \le 324 \Rightarrow 12 \le 6 + x \le 18 \Rightarrow 6 \le x \le 12$$

Debe añadirse entre 6 cm y 12 cm.

72. Se consideran los rectángulos cuya base mide el doble que la altura. ¿Cuáles verifican que su área está comprendida entre 8 cm^2 y 72 cm^2?

Supongamos que las medidas son $2x$ de base y x de altura.

El área será:

$$S = 2xx = 2x^2 \Rightarrow 8 < 2x^2 < 72 \Rightarrow 4 < x^2 < 36 \Rightarrow 2 < x < 6$$

La medida de la altura ha de ser un número comprendido entre 2 cm y 6 cm.

73. Se quiere construir una plaza circular cuya superficie debe estar comprendida entre 5000 y 6000 m^2. ¿Entre qué dos valores se encuentra el radio de la plaza? ¿Y su perímetro?

Sea x el radio de la plaza. Debe ocurrir que:

$$5000 < \pi x^2 < 6000 \Rightarrow 1591{,}55 < x^2 < 1909{,}86 \Rightarrow 39{,}89 < x < 43{,}7 \text{ m.}$$

Por tanto, su perímetro estará entre $250{,}51 < 2\pi x < 274{,}58$ m.

74. Un montañero puede caminar a una velocidad comprendida entre 4 km/h y 6 km/h dependiendo de la mayor o menor dificultad del terreno. Averigua entre qué valores oscila el tiempo que tardará en recorrer una senda de 25 km.

$$4 \le v \le 6 \Rightarrow 4 \le \frac{e}{t} \le 6 \Rightarrow 4 \le \frac{25}{t} \le 6 \Rightarrow \begin{cases} 4 \le \dfrac{25}{t} \Rightarrow t \le \dfrac{25}{4} = 6{,}25 = 6\text{ h } 15\text{ min} \\ \dfrac{25}{t} \le 6 \Rightarrow t \ge \dfrac{25}{6} = 4\text{ h } 10\text{ min} \end{cases}$$

Deberá caminar entre 4 h 10 min y 6 h 15 min.

75. Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho y está dividido en cuatro parcelas con las siguientes características:

- **Sus dimensiones son números enteros.**
- **La parcela más grande tiene un área de 450 m².**
- **La parcela más pequeña tiene un área comprendida entre 30 m² y 40 m².**
- **Las otras dos parcelas tienen la misma superficie.**

¿Cuál es el área total del terreno?

Sea x el área de la parcela más pequeña e y el área de una de las parcelas medianas. Tenemos que:

$\begin{cases} 30 < x < 40 \\ x < y < 450 \end{cases}$ y que $450 + 2y + x$ es el doble de un cuadrado perfecto $2k^2$, por lo que x debe ser par, $x = 2x'$, y queda $225 + y + x' = k^2$, con $\begin{cases} 15 < x' < 20 \\ 2x' < y < 450 \end{cases}$

Entonces, $225 + 30 + 15 < k^2 < 225 + 450 + 20 \Rightarrow 270 < k^2 < 695 \Rightarrow 17 \le k \le 26$.

Por tanto, el área total $2k^2$ puede ser 578, 648, 722, 800, 882, 968, 1058, 1152, 1250, o 1352 m².

76. En un territorio, el crecimiento de la población se ajusta a un modelo exponencial:

$$P_f = P_i\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

a) Si actualmente la población es de 25 000 personas, ¿cuál debe ser la tasa mínima de crecimiento para que en 5 años pase a ser de 30 000 personas?

b) Considerando la tasa de crecimiento del apartado anterior, ¿qué población habrá en el territorio pasados 50 años?

a) $P_i = 25\,000$ y queremos que ocurra que P_f sea al menos 30 000. Entonces:

$$30\,000 \le 25\,000\left(1+\frac{r}{100}\right)^5 \Rightarrow r = 3{,}71$$

b) $P_f = 25\,000\left(1+\frac{3{,}71}{100}\right)^{50} \simeq 154\,515{,}4$. Habrá una población de 154 515 personas.

77. Al comprar 8 bolígrafos se pagó con un billete de 5 €, pero no se recuerda a cuánto ascendía la vuelta. Otro cliente fue a comprar 12 bolígrafos de la misma clase, pero tuvo que volver a casa, ya que los 6,50 € que llevaba para pagar no eran suficientes. ¿Qué se puede decir del precio de un bolígrafo?

Sea x el precio de cada bolígrafo en céntimos de euro. Entonces: $\begin{cases} 8x < 500 \\ 12x > 650 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 62{,}5 \\ x > 54{,}1\widehat{6} \end{cases}$

Por tanto, el precio de cada bolígrafo está entre 0,55 € y 0,62 €.

78. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos posibles modelos de contrato.

- **El modelo *A* consiste en pagar una cantidad fija de 50 € además de 0,08 € por cada kilómetro recorrido.**
- **El modelo *B* consiste en pagar 80 € sin limitación de kilometraje.**

¿A partir de cuántos kilómetros interesa el alquiler según el modelo *B*?

Sea x el número de km a recorrer

$50 + 0{,}08x > 80 \Rightarrow x > \frac{30}{0{,}08} = 375$. Interesa el alquiler según el modelo B a partir de 375 km.

79. Una empresa precisa repartidores de *pizzas* y ofrece las siguientes opciones de contrato:

- **Se cobrará una cantidad mensual fija de 350 € más 3 € por cada *pizza* repartida.**
- **Sueldo fijo de 600 €, independiente del número de *pizzas* repartidas.**

Calcula el número mínimo de *pizzas* que se han de repartir para que convenga escoger la primera opción.

Sea *x* el número de pizzas. Entonces:

$$350 + 3x \geq 600 \Rightarrow x \geq 83{,}3$$

Por tanto, conviene elegir la primera opción a partir de 84 *pizzas*.

80. El nivel de alcohol, *N*, en sangre de una persona que ha bebido tres cuartos de litro de cerveza en función de su peso, *x*, en kilogramos, pasada media hora, es:

$$N = \frac{400}{7x}$$

Aunque nunca se debe conducir tras haber ingerido alcohol, la ley de tráfico establece fuertes multas para aquellas personas que conduzcan con un nivel superior a 0,3 g/L. Indica qué personas no podrían conducir a los 30 minutos de haber bebido tres cuartos de litro de cerveza.

$N = \frac{400}{7x} > 0{,}3 \Rightarrow 400 > 2{,}1x \Rightarrow x < \frac{400}{2{,}1} = 190{,}48$. Las que no superen los 190,48 kg de peso. (Ninguna)

81. Un alimento tiene las siguientes características en su composición:

- **Tiene el triple de masa de grasa que de hidratos de carbono.**
- **La masa de las proteínas es 16 veces la masa de los hidratos de carbono.**
- **En 100 g del alimento hay entre 20 g y 30 g de hidratos de carbono, proteínas y grasas en total.**

a) Determina las diferentes posibilidades de la composición de 100 g de ese alimento.

b) ¿Puede ocurrir que haya 0,5 g de hidratos de carbono, 8 g de proteínas y 1,5 g de grasas?

c) ¿Puede ocurrir que haya 1,25 g de hidratos de carbono, 20 g de proteínas y 3,75 g de grasas?

a) En 100 gramos de alimento: *x* g de hidratos de carbono, 3*x* g de grasa y 16*x* g de proteínas.

Por tanto: $20 \leq x + 3x + 16x \leq 30 \Rightarrow 20 \leq 20x \leq 30 \Rightarrow 1 \leq x \leq 1{,}5$

Entre 1 y 1,5 g de hidratos de carbono, entre 3 y 4,5 g de grasa y entre 16 y 24 g de proteínas.

b) No es posible, ya que no se verifican todas las condiciones.

c) Sí es posible.

82. **Se quieren confeccionar camisetas deportivas de dos calidades, que se diferencian en la proporción de algodón y de fibra sintética que se utiliza.**

La tabla siguiente da la composición de cada tipo de camiseta:

	Unidades de algodón	Unidades de fibra sintética
Calidad extra	4	1
Calidad media	2	3

Para confeccionar todas las camisetas se dispone de un total de 260 unidades de algodón y de 190 unidades de fibra sintética.

a) Determina, de forma gráfica, las diferentes posibilidades que hay de producir las camisetas.

b) ¿Es posible confeccionar 50 camisetas de calidad extra y 40 de calidad media?

a) Sean:

x número de camisetas de calidad extra

y el número de camisetas de calidad media

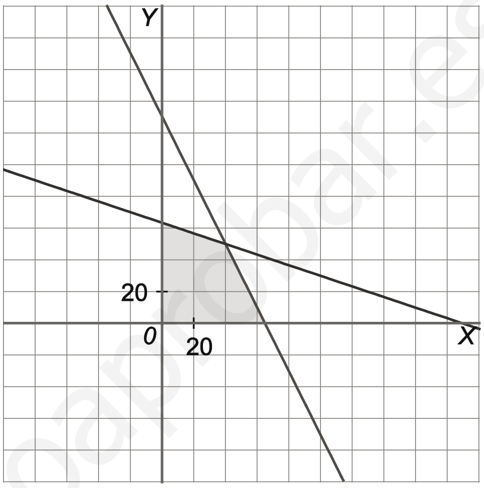
$$\begin{cases} 4x + 2y \le 260 \\ x + 3y \le 190 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Vértices:

A (0; 63,3)

B(40, 50)

C (65, 0)



b) No es posible por falta de algodón.

83. **La función de demanda, f_d, correspondiente al mercado de alquiler de ciertas herramientas de bricolaje es para un precio, *p*, comprendido entre 15 € y 19 €:**

$$f_d = -\frac{3}{10}p^2 - \frac{119}{10}p + 123$$

¿Para qué precios la demanda es inferior a 6 unidades?

$f_d < 6 \Rightarrow -3p^2 - 119p + 1170 < 0 \Rightarrow (-\infty, -47{,}82) \cup (8{,}16, +\infty)$

Como *p* está comprendido entre 15 € y 19 €, entonces para $15 \le p \le 19$ la demanda es inferior a 6 unidades.

84. El tratamiento de una enfermedad requiere la administración de dos sustancias curativas, *C* y *D*. Cada semana es preciso consumir por lo menos 30 mg de *C* y 42 mg de *D*. Estas sustancias están incluidas en dos tipos de comprimidos diferentes, *G* y *P*, de la forma siguiente:

- **En un comprimido *G* hay 3 mg de *C* y 5 mg de *D*.**
- **En un comprimido *P* hay 1 mg de *C* y 1 de *D*.**

a) Representa gráficamente las posibles formas en que pueden administrarse al paciente las dosis necesarias.

b) Indica si las condiciones se verifican al tomar:

- 1 comprimido *G* cada día de la semana
- 1 comprimido *P* de lunes a viernes
- 2 comprimidos *P* los sábados y domingos

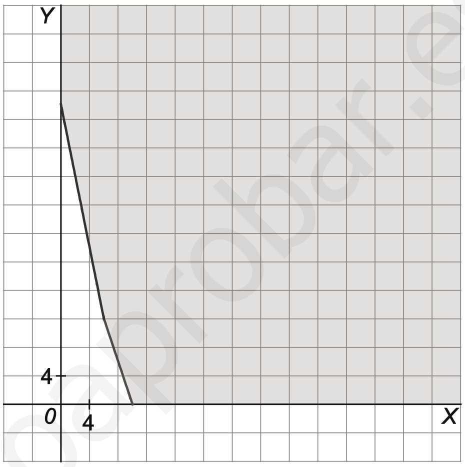
a) Sean:

x el número de comprimidos *G*

y el número de comprimidos *P*

$$\begin{cases} 3x + y \geq 30 \\ 5x + y \geq 42 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices: $A(0, 42)$, $B(6, 12)$ y $C(10, 0)$



b) 7 comprimidos *G* y 9 *P* sí las verifican.

85. En unos almacenes de ropa deportiva cuentan con 200 balones y 300 camisetas. Tras un estudio de mercado ponen las existencias a la venta en dos tipos de lotes. El primer lote lleva un balón y tres camisetas y el segundo dos balones y dos camisetas.

El número total de lotes no debe superar los 110 y, en particular, el número máximo de lotes del primer tipo no debe superar los 60.

a) Representa las posibles formas de elaborar los lotes.

b) Indica si cada una de las siguientes posibilidades verifica las condiciones:

- 40 del primer tipo y 80 del segundo.
- 40 del primer tipo y 70 del segundo.
- 70 del primer tipo y ninguno del segundo.

a) Sean

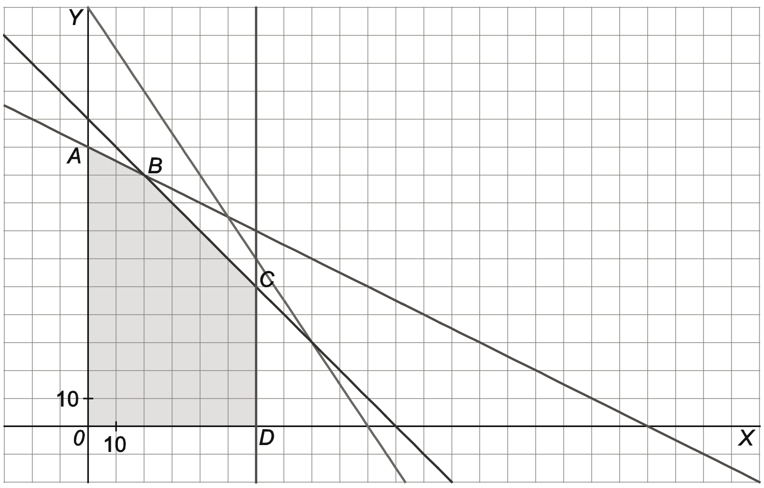
x el número de lotes tipo 1

y el número de lotes tipo 2.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 200 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ x + y \leq 110 \\ 60 \geq x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices: $A(0, 100)$, $B(20, 90)$

$C(60, 50)$ y $D(60, 0)$



b) No, sí y no, respectivamente.

ENTORNO MATEMÁTICO

Montamos una tienda de bicis…

Ángela es dentista, Juan es cocinero e Ignacio es abogado. Los tres hermanos tienen una afición común: la práctica del ciclismo amateur. Todos los fines de semana salen a dar una vuelta en bicicleta por caminos forestales.

En una de las ocasiones, decidieron hacer una competición: debían subir a la cima de un monte con una altura de 1400 m sobre el nivel del mar partiendo de su falda que se encuentra a 1050 m sobre el nivel del mar. El que llegara el último, debería comprar 30 € de lotería para el próximo sorteo.

Por supuesto, y como siempre, en un alarde de buena forma física… Juan llegó el último y compró la lotería y contra todo pronóstico… ¡ganaron el premio gordo!

Decidieron invertir el dinero ganado en montar una empresa de distribución y venta de bicicletas de montaña.

Después de realizar un estudio de mercado, estiman que las funciones de oferta y demanda de un cierto tipo de bicicletas son, para precios comprendidos entre $p = 200$ € y $p = 250$ €:

$$f_o = -\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} \qquad f_d = -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3}$$

donde f_o y f_d representa el número de unidades ofertadas y demandadas para el precio p.

a) Calcula para qué valores de p la oferta supera a la demanda y para qué valores la demanda supera a la oferta. Interpreta los resultados.

b) Halla para qué valores de p la oferta es superior a 35 unidades.

c) Halla para qué valores de p la demanda es inferior a 30 unidades.

a) $f_o > f_d \Rightarrow -\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} > -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3} \Rightarrow \frac{3}{200}p^2 - \frac{109}{20}p + 460 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3p^2 - 1090p + 92000 > 0 \Rightarrow (p-230)(3p-400) > 0 \Rightarrow p \in \left(-\infty, \frac{400}{3}\right) \cup (230, +\infty)$

Como el dominio de interés de los precios es [200, 250], la oferta superará a la demanda cuando el precio sea superiores a 230 € e inferior o igual a 250 €. Por el contrario, la demanda superará a la oferta cuando el precio sea superior o igual a 200 € e inferior a 230 €.

El punto de equilibrio del mercado se obtiene con un precio de 230 €.

b) $-\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} > 35 \Rightarrow p \in (217,\ 250)$

Para precios comprendidos entre 217 y 250 euros, la oferta es superior a 35 unidades.

c) $f_d = -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3} < 30 \Rightarrow p \in (239,\ 250)$

Para precios comprendidos entre 239 € y 250 €, la demanda es inferior a 30 unidades.

… o de accesorios de bicis

Una vez pasada la emoción de haber ganado, empiezan los miedos, y Ángela, Juan e Ignacio ya no están tan seguros de que las bicis sean buena idea. Un local grande, material grande, mucho trabajo,…

Por tanto han pensado, como segunda opción, colocar el premio en crear una empresa que empaquete y distribuya lotes de artículos para el mantenimiento de la bicicleta. Es algo más pequeño e incluso podrían empaquetar a mano y vender por internet.

Los lotes contendrán cámaras para las ruedas, cajas de parches y esprays para reparación de pinchazos.

Deciden elaborar dos tipos de lotes. La tabla siguiente muestra la composición de cada lote.

	Cámaras	Parches	Esprays
LOTE *A*	4	1	1
LOTE *B*	2	2	1

Se cuenta con un máximo de 70 cámaras, 30 cajas de parches y 20 esprays reparadores.

a) Suponiendo que se forman x lotes de tipo A e y lotes de tipo B, establece, mediante un sistema de inecuaciones con las incógnitas x e y, las condiciones que deben verificar los valores de x e y para que sea factible la elaboración de estos lotes teniendo en cuenta las existencias de cada producto.

b) Mediante GeoGebra dibuja la región de puntos (x,y) que cumplen todas las condiciones anteriores. Establece las coordenadas de todos los vértices de la región.

c) Indica si las siguientes soluciones son o no posibles:

A. $x = 5 \;\; y = 12$ **B.** $x = 5 \;\; y = 13$ **C.** $x = 10 \;\; y = 10$ **D.** $x = 17 \;\; y = 2$

d) Si finalmente se elaboran 15 lotes de A y 5 lotes de B, ¿se agotarán todas las existencias de los tres productos?

a) Si se forman x lotes de tipo A e y lotes de tipo B, se deberán cumplir todas y cada una de las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} 4x + 2y \le 70 \\ x + 2y \le 30 \\ x + y \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

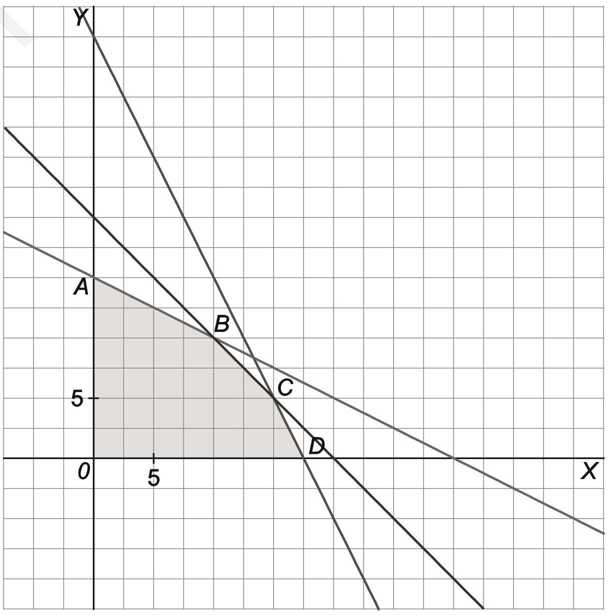
b) Vértices: $O(0, 0)$

$$A\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow A(0,15)$$

$$B\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow B(10,10)$$

$$C\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \Rightarrow C(15,5)$$

$$D\begin{cases} y = 0 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \Rightarrow D(17,5;0)$$



c) A. $x = 5 \;\; y = 12$ Si. B. $x = 5 \;\; y = 13$. No. C. $x = 10 \;\; y = 10$ Si. D. $x = 17 \;\; y = 2$ No.

d) Se agotarán las existencias de cámaras y de esprays pero sobrarán 5 cajas de parches.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Resuelve las inecuaciones lineales.

a) $x - \frac{5}{2} > 2 + \frac{x+5}{2}$ **b)** $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} \le \frac{45}{8}$

a) $(14, +\infty)$ **b)** $(-\infty, 9]$

2. Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $4x^2 + 2x - 12 \le 0$ **b)** $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x \ge -1$

a) $2(x+2)(2x-3) \le 0 \Rightarrow \left[-2, \frac{3}{2}\right]$ **b)** $(3-x)(2x+1) \ge 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{2x-3}{4x-1} \le -1$ **b)** $\frac{6}{5(x-3)} + \frac{4}{5(x+2)} \ge -1$

a) $\frac{6x-4}{4x-1} \le 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$ **b)** $\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)} \ge 0 \Rightarrow (-\infty, -3] \cup (-2, 2] \cup (3, +\infty)$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 \le 0$ **b)** $2x^3 + x^2 - 5x \ge -2$

a) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \le 0 \Rightarrow [-3, \ -1] \cup [1, \ 3]$ **b)** $(x-1)(x+2)(2x-1) \ge 0 \Rightarrow \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

5. Resuelve el sistema de inecuaciones lineales con una incógnita.

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 3 \le \frac{x-2}{3} + 1} \\ \mathbf{-2x + 5 \ge 1} \end{cases}$$

$(-\infty, \ 2]$

6. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \frac{x-3}{x-2} < 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3 < 5 \\ \frac{x-1}{x+1} < 2 \\ x^2 - 2x \ge 0 \end{cases}$

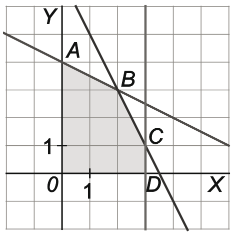
a) $\begin{cases} (x+2)(x-3) \le 0 \\ \frac{x-3}{x-2} < 0 \end{cases} \Rightarrow (2, 3)$ **b)** $\begin{cases} x < 4 \\ \frac{x+3}{x+1} > 0 \\ x(x-2) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow (-\infty, -3) \cup (-1, 0] \cup [2, 4)$

7. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

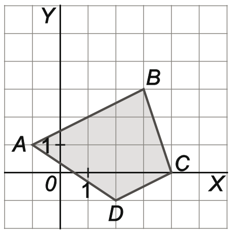
a) $\begin{cases} x+2y\le 8 \\ 2x+y\le 7 \\ 0\le x\le 3 \quad y\ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y\le 12 \\ x-2y\ge -3 \\ y\ge \dfrac{x}{2}-2 \\ 2x+3y\ge 1 \end{cases}$

a) $O(0, 0)$, $A(0, 4)$, $B(2, 3)$, $C(3, 1)$, $D(3, 0)$



b) $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 0)$, $D(2, -1)$



8. En una clase hay 15 chicas y 10 chicos. La media aritmética de las calificaciones de las chicas en el último examen de matemáticas ha sido 6,25. ¿Entre qué valores se encuentra la media de los chicos si se sabe que la media de toda la clase es superior a 5,25 e inferior a 6,5?

Sea x la media aritmética de la nota de los chicos en matemáticas. Como la media aritmética de las chicas es 6,25, entonces:

$$25\cdot 5,25 \le 6,25\cdot 15 + 10x \le 25\cdot 6,5 \Rightarrow 131,25 \le 93,75 + 10x \le 162,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 37,5 \le 10x \le 68,75 \Rightarrow 3,75 \le x \le 6,875$$

Luego la media de los chicos se encuentra entre 3,75 y 6,875, ambas notas medias incluidas.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Las inecuaciones $2x-1\le 0$ y $\dfrac{2x-1}{x+1}\le 0$ tienen como conjuntos solución respectivos C_1 y C_2.

A. $C_1 = C_2$ **B.** $C_1 \subset C_2$ **C.** $C_2 \subset C_1$ **D.** $C_1 = C_2 - \{-1\}$

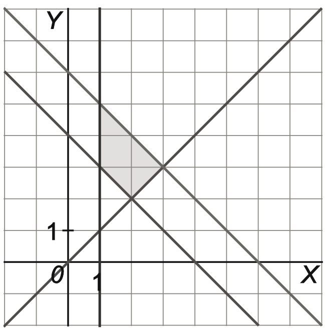
Solución: C

2. La solución de la inecuación $x^2-(a+b)x+ab<0$, donde $a<0<b$ es:

A. $(-\infty, a)\cup(b,+\infty)$ **B.** $(-\infty, a]\cup[b,+\infty)$ **C.** (a,b) **D.** $[a,b]$

Solución: C

3. La zona sombreada de $\mathbb{R}^2$ que aparece a la derecha puede ser determinada por el sistema de inecuaciones:



A. $\{x\ge 1, y\ge x, x+y\le 4, x+y\ge 6\}$

B. $\{x\ge 1, y\le x, x+y\ge 4, x+y\le 6\}$

C. $\{x\ge 1, y\ge x, x+y\ge 4, x+y\le 6, y\le 1\}$

D. $\{x\ge 1, y\ge x, x+y\ge 4, x+y\le 6\}$

Solución: D

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Si la solución de la inecuación $x^2+x+c>0$ con $c\neq 0$ es $(-\infty, c)\cup(b,+\infty)$, entonces:**

A. $c=2$ **C.** $b=-1$

B. $c=-2$ **D.** $b=1$

Solución: B y D

5. **Se considera la inecuación $\dfrac{x-1}{x+2}\geq r$.**

A. $x=-3$ forma parte de la solución.

B. $x=-1$ y $x=1$ forman parte de la solución.

C. $x=-5$ forma parte de la solución pero $x=-2$ no.

D. $x=-2$ forma parte de la solución pero $x=-5$ no.

Solución: A y C

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones

6. **Se quiere obtener la solución de la inecuación $|x-r|\leq 2$. Se consideran las afirmaciones:**

1. r es un número estrictamente negativo.

2. El conjunto solución es el vacío.

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$ **C.** 1 y 2 son excluyentes entre sí.

B. $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$ **D.** Nada de lo anterior.

Solución: D

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se quiere obtener y dibujar la solución de la inecuación $ax+by\leq 0$. Para ello se aportan los siguientes datos:**

1. $a=1$ y $b=2$

2. $b=2a$

A. Debe eliminarse necesariamente el dato 1.

B. Debe eliminarse necesariamente el dato 2.

C. Pueden eliminarse cualquiera de los dos datos.

D. Hacen falta los dos datos.

Solución: C