Unidad 2 – Polinomios. Fracciones algebraicas

PÁGINA 31

cuestiones iniciales

1. Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1)$ b) $(x^4 - x) : (x - 2)$

2. Calcula el valor de a para que el polinomio:

$$A(x) = x^3 + ax^2 - 7x - 2$$

dé como resto 5 al dividirlo por $x + 3$.

3. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ b) $B(x) = x^4 - 16$

4. Efectúa y da el resultado en forma de fracción irreducible:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

SOLUCIONES

1. Diremos que:

a) Resto 0; Cociente $x^2 - 4x + 4$

b) Resto 14; Cociente $x^3 + 2x^2 + 4x + 7$

2. Utilizando el teorema del resto:

$$\text{Resto} = A(-3) \quad \Rightarrow \quad 5 = (-3)^3 + a(-3)^2 - 7(-3) - 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{13}{9}$$

3. La descomposición queda:

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$

b) $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

4. Operando obtenemos:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)\cdot x \cdot (x+1)}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = 1$$

PÁGINA 43

ACTIVIDADES

■ Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, redacta los protocolos de los siguientes problemas:

1. **Decoración.** ¿Cómo colocarías 10 lámparas de pie en torno a un cuarto de estar cuadrado, de manera que haya el mismo número de lámparas junto a cada pared?

2. **Las calles del pueblo.** Todas las calles de un pueblo son rectas, sin que haya dos paralelas. Al emplear una farola en cada cruce, se colocan 66 farolas. ¿Cuántas calles tiene como mínimo el pueblo?

3. **Un criado sabio.** Un señor tenía sus mejores botellas de vino dispuestas en la cava de la manera indicada en la figura.

6	9	6
9		9
6	9	6

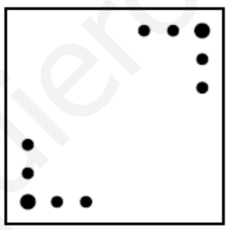
Desconfiaba de su criado y todas las noches, antes de acostarse, bajaba a la cava y las contaba, sumando el número de botellas que había en los tres compartimentos de cada uno de los cuatro lados. Si la suma era 21 botellas en los cuatro casos, descansaba feliz.

El criado, por su parte, sabedor de la estratagema y del bajo concepto que de él tenía el señor, decidió robarle botellas. ¡Y lo consiguió! Le robaba unas cuantas y redistribuía las restantes, de tal modo que ello no perturbase los sueños del amo.

¿Cuántas botellas, como máximo, pudo robar? ¿Cómo quedó la cava?

SOLUCIONES

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. La solución queda:

Si hay n calles el número máximo de cruces es: $C_{n,2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$.

Luego si hay 66 farolas $\Rightarrow$ 66 cruces $\Rightarrow$ $\dfrac{n^2 - n}{2}$ $\Rightarrow$ $n^2 - n - 132 = 0$ $\Rightarrow$ $n = 12$ calles como mínimo tenía el pueblo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.
Como máximo se pudo robar:

$$60 - 42 = 18 \text{ botellas.}$$

1		20
20		1

La disposición de las 42 botellas en la cava admite muchas formas diferentes.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra el polinomio $A(x)$ que satisfaga la igualdad:

$$(x^2 - 3) \cdot A(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$$

2. Determina a y b de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$(x^2 - 2x + 3) \cdot (ax + b) + 5 = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$$

3. Dados los polinomios:

$$A(x) = -x^3 - 2x + 5; \quad B(x) = 2x^4 + x^3; \quad C(x) = 2x - 5$$

calcula:

a) $A(x) + B(x) - C(x)$
b) $A(x) - [B(x) - C(x)]$
c) $A(x) - 2\,B(x)$
d) $B(x) \cdot C(x)$
e) $[B(x)]^2$
f) $C(x) \cdot [B(x) + A(x)]$

4. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(3 - 2x)^2$
b) $(5x - 2)(5x + 2)$
c) $(2 + x)^3$
d) $\left(\frac{1}{2} + 4x\right)^2$
e) $(x - 3)^2 - (x + 3)^2$
f) $(3x + 5)^2 - (3x - 5)(3x + 5)$

5. Determina el cociente y el resto de las divisiones:

a) $(3x^6 - 4x^5 + 7x^3 - 6x^2 + 2x - 3) : x^2$
b) $(x^5 - 7x^4 + 12x^3 - 5x^2 + 6x - 10) : (x + 5)$
c) $(3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3) : (x^2 + x + 1)$

6. Al dividir un polinomio $D(x)$ por $d(x) = 5x^2 + 3$, se obtiene como cociente $c(x) = x^2 - 2x + 1$ y como resto $r(x) = 3x + 4$. Halla el polinomio $D(x)$.

7. Si $D(x) = 5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x - 4$ es el dividendo; $c(x) = x^2 - 1$, el cociente y $r(x) = x - 2$ el resto de la división entre $D(x)$ y $d(x)$; halla el divisor $d(x)$.

8. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, por los valores que se indican:

a) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$ para $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$
b) $x^4 + x^3 + 13x^2 - x - 12$ para $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$
c) $2x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ para $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{4}$

9. Efectúa las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a) $(x^4 - 3x^3 + 4x - 2) : (x - 1)$
b) $(2x^4 - 17) : (x + 2)$
c) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

10. Calcula el valor de a para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(3x^3 - 2x^2 + 5x + a) : (x + 1)$
b) $(-x^4 + 2x^3 - ax + 1) : (x - 2)$

11. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dado el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$ calcula: $P(0)$, $P(1)$ y $P(-2)$.
b) Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + 6$ sea divisible por $x + 1$.
c) Calcula el valor de a para el cual el resto de la división $(x^4 - 4x^3 + ax) : (x + 2)$ es 2.
d) Calcula el resto de dividir el polinomio $B(x) = x^2 + 3x - 5$ por x.

SOLUCIONES

1. Quedan del siguiente modo:

- Mediante identidad de polinomios:

  $(x^2-3)(ax+b)=x^3+2x^2-3x-6$

  $ax^3+bx^2-3ax-3b = x^3+2x^2-3x-6$

Identificando coeficientes obtenemos:

  $a=1,\ b=2 \ \Rightarrow$ el polinomio $\mathrm{A}(x)=x+2$

- Mediante división:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2-3}=x+2$$

2. Operando y utilizando la identidad de polinomios obtenemos: $a=1$ y $b=-2$.

3. Quedarían:

a) $2x^4-4x+10$ b) $-2x^4-2x^3$

c) $-4x^4-3x^3-2x+5$ d) $4x^5-8x^4-5x^3$

e) $4x^8+4x^7+x^6$ f) $4x^5-10x^4-4x^2+20x-25$

4. Quedarían:

a) $9-12x+4x^2$ b) $25x^2-4$

c) $8+12x+6x^2+x^3$ d) $\frac{1}{4}+4x+16x^2$

e) $-12x$ f) $30x+50$

5. La solución en cada uno de los casos es:

a) Cociente: $3x^4-4x^3+7x-6$; Resto: $2x-3$.

b) Cociente: $x^4-12x^3+72x^2+355x+1781$; Resto: 8895.

c) Cociente: $3x^2+2x-3$; Resto: $6-5x$.

6. La solución puede expresarse como: $D(x)=d(x)\cdot c(x)+r(x)=5x^4-10x^3+8x^2-3x+7$.

7. La solución puede expresarse como: $d(x)=\dfrac{D(x)-r(x)}{c(x)}=5x^2+6x+2$.

8. La solución queda:

a) -30 ; 0 ; 12 b) 2 ; 2 ; 210 c) -5 ; $-\frac{5}{2}$; $-\frac{55}{32}$

9. La solución quedaría:

a) Cociente: x^3-2x^2-2x+2 ; Resto: 0.
b) Cociente: $2x^3-4x^2+8x-16$; Resto: 15.
c) Cociente: $x^4+2x^3+4x^2+8x+16$; Resto: 0.

10. El valor en cada caso es: a) $a=10$ b) $a=\frac{1}{2}$

11. Quedaría:
a) $P(0)=3$; $P(1)=3$; $P(-2)=3$
b) Debe verificarse que $P(-1)=0 \Rightarrow k=4$
c) Debe verificarse que $P(-2)=2 \Rightarrow a=23$
d) El resto de esta división es $B(0)=-5$

PÁGINA 47

■ 12. Encuentra las raíces de cada uno de los polinomios siguientes:

a) $A(x) = x^3 - 4x$ b) $B(x) = 2x^4 - 32$ c) $C(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

■ 13. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^4 - 25x^2 + 144$

b) $B(x) = x^3 + 2x^2 + x$

c) $C(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

d) $D(x) = 8x^3 + 2x^2 - 13x + 3$

e) $E(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

f) $F(x) = x^3 + 8x^2 + 16x$

■ 14. Dados los polinomios:

$A(x) = x(x+1)^2(x-2)^2$ $B(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$ $C(x) = x^3(x+1)(x+2)^3$

halla el MCD y el mcm de los polinomios que se indican:

a) $A(x)$ y $B(x)$ b) $A(x)$ y $C(x)$ c) $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$

■ 15. Calcula el MCD y el mcm de los siguentes polinomios:

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$; $B(x) = x^2 + x - 6$

b) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$; $D(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

c) $E(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$; $F(x) = -2x^2 - x + 10$

■ 16. Para los polinomios $A(x) = 3x^2 - 12$ y $B(x) = 2x^4 - 2x^3 - 4x^2$ comprueba:

$$\text{MCD}\,[A(x), B(x)] \cdot \text{mcm}\,[A(x), B(x)] = A(x) \cdot B(x)$$

■ 17. Obtén la fracción irreducible en cada una de las siguientes:

a) $\dfrac{5x^2 - 15x}{10x^3 + 15x^2}$

b) $\dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\dfrac{6 - x - x^2}{x^2 + 2x - 8}$

d) $\dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 6x^2 + 2x + 12}$

■ 18. Halla el polinomio $P(x)$ para que se cumplan las siguientes equivalencias de fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{P(x)}{x^2 - x} = \dfrac{x + 1}{x}$

b) $\dfrac{x}{P(x)} = \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$

c) $\dfrac{x - 2}{x + 3} = \dfrac{P(x)}{x^2 - 9}$

d) $\dfrac{x + 4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 16}{P(x)}$

■ 19. En cada caso, reduce a común denominador las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x + 1}{2x}, \quad \dfrac{5}{3x^2}$

b) $\dfrac{3x}{x - 1}, \quad \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}, \quad \dfrac{x}{x + 1}$

c) $\dfrac{x + 1}{5x}, \quad \dfrac{x - 1}{x^2 + x}, \quad \dfrac{x}{3x + 3}$

d) $\dfrac{x}{2}, \quad \dfrac{3}{2x^2 - 50}, \quad \dfrac{2x}{x + 5}$

12. Las raíces son:

a) $0\ ;\ 2\ \text{y}\ -2$ b) $2\ \text{y}\ -2$ c) $2\ \text{y}\ -2$

13. Las descomposiciones pedidas son:

a) $\text{A}(\text{x})=(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

b) $\text{B}(\text{x})=x(x+1)^2$

c) $\text{C}(\text{x})=(x-1)^2(x+1)$

d) $\text{D}(\text{x})=8(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

e) $\text{E}(\text{x})=(x+1)(x^2+1)(x-3)$

f) $\text{F}(\text{x})=x(x+4)^2$

14. La solución en cada uno de los casos queda:

a) $MCD\,[A(x),B(x)]=x(x-2)^2$

$mcm\,[A(x),B(x)]=x^2\,(x-2)^2\,(x+1)^2\,(x-1)$

b) $MCD\,[A(x),C(x)]=x(x+1)$

$mcm\,[A(x),C(x)]=x^3\,(x-2)^2\,(x+1)^2\,(x+2)^3$

c) $MCD\,[A(x),B(x),C(x)]=x$

$mcm\,[A(x),B(x),C(x)]=x^3\,(x-2)^2\,(x+1)^2\,(x+2)^3\,(x-1)$

15. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm.

a) $$\left.\begin{array}{l}\text{A}(x)=x\,(x-3)\,(x-2)\\ \text{B}(x)=(x+3)\,(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}MCD\,[A(x),B(x)]=(x-2)\\ mcm\,[A(x),B(x)]=x\,(x-3)\,(x-2)\,(x+3)\end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\text{C}(x)=(x-3)\,(x^2-x+2)\\ \text{D}(x)=(x-2)^2\,(x-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}MCD\,[C(x),D(x)]=1\\ mcm\,[C(x),D(x)]=C(x)\cdot D(x)\end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\text{E}(x)=2\,(x^2+x+1)\,(x-2)\\ \text{F}(x)=-2\,(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}MCD\,[E(x),F(x)]=2\,(x-2)\\ mcm\,[E(x),F(x)]=-2\,(x-2)\,(x^2+x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right)\end{array}$$

16. Se comprueba fácilmente a partir de las descomposiciones factoriales de los polinomios:

$$\left.\begin{array}{l} A(x)=3(x-2)(x+2) \\ B(x)=2x^2(x+1)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} MCD\,[A(x),B(x)]=(x-2) \\ mcm\,[A(x),B(x)]=6x^2\,(x+1)\,(x-2)\,(x+2) \end{array}$$

17. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2}=\dfrac{5x\,(x-3)}{5x^2\,(2x+3)}=\dfrac{x-3}{2x^2+3x}$

b) $\dfrac{2x-4}{x^2-4x+4}=\dfrac{2\,(x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{x-2}$

c) $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+2x-8}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)\,(-1)}{(x-2)\,(x+4)}=\dfrac{-x-3}{x+4}$

d) $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+2x+12}=\dfrac{(x-2)^2\,(x+3)}{(x-2)\,(x^2-4x-6)}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{x^2-4x-6}=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-6}$

18. En cada uno de los casos queda:

a) $P(x)=x^2-1$ b) $P(x)=x+5$

c) $P(x)=x^2-5x+6$ d) $P(x)=x^3-4x^2$

19. En cada caso queda:

a) $\dfrac{3x^2+3x}{6x^2},\ \dfrac{10}{6x^2}$

b) $\dfrac{3x^2+3x}{x^2-1},\ \dfrac{x+2}{x^2-1},\ \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3x^2+6x+3}{15x^2+15x},\ \dfrac{15x-15}{15x^2+15x},\ \dfrac{5x^2}{15x^2+15x}$

d) $\dfrac{x^3-25x}{2x^2-50},\ \dfrac{3}{2x^2-50},\ \dfrac{4x^2-20x}{2x^2-50}$

ACTIVIDADES FINALES

20. Efectúa las siguientes operaciones y da el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{3x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{2}{x+2}$

d) $\dfrac{5x}{x+3}+\dfrac{3}{x-2}$

21. Efectúa las siguientes operaciones y obtén en cada caso la fracción irreducible:

a) $\dfrac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\dfrac{4x^2+4}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12}$

c) $\dfrac{x-1}{2x+6}:\dfrac{x^2-1}{-3x-9}$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-x}:\dfrac{2x+6}{4x^2-8x+4}$

22. Realiza las operaciones combinadas siguientes dando el resultado en la forma más simplificada posible:

a) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right):\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

b) $\dfrac{x^2+4x}{x^2}:\dfrac{x^2-16}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{3x-12}{x^2-x}$

c) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x-1}$

d) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$

e) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}$

f) $\dfrac{x+1}{2x}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

23. Utilizando la identidad de polinomios resuelve las siguientes cuestiones:

a) Calcula a y b de forma que se verifique:

$$(x^2+x+1)\cdot(ax+b)=2x^3+x^2+x-1$$

b) Calcula A y B de modo que se verifique la igualdad siguiente:

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

24. Responde a las cuestiones:

a) Encuentra las raíces de los polinomios:

$$A(x)=x^4-x^3-x^2-x-2 \qquad B(x)=x^3+4x^2+4x \qquad C(x)=x^3+9x$$

b) Encuentra el polinomio en cada uno de los casos siguientes:

i) Raíces 1, 2 y 3.

ii) Raíces 0 y 1 doble.

iii) Raíces 0 doble y –1 triple.

c) Halla un polinomio de primer grado sabiendo que su raíz es –2 y que toma el valor 5 para $x=3$.

25. Comprueba si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $(x^2+1)^2-(x^2-1)^2=4x^2$

b) $\dfrac{x-1}{1-\dfrac{1}{x}}=x$

20. Queda en cada caso:

a) $\frac{9x+2}{3x^2}$ b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $\frac{3}{x^2-4}$ d) $\frac{5x^2-7x+9}{(x+3)(x-2)}$

21. Queda en cada caso:

a) $\frac{4x}{x-1}$ b) $\frac{5}{2x-2}$ c) $\frac{-3}{2x+2}$ d) $\frac{2(x+3)(x-1)}{x}$

22. Queda en cada caso:

a) 1 b) $\frac{3x+3}{x^2}$ c) 1

d) $\frac{x}{x-2}$ e) $\frac{x^3+3x^2+9x+27}{3}$ f) $\frac{1}{x-x^2}$

23. La solución queda:

a) Utilizando el principio de identidad de polinomios obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Para } x=0 \;\Rightarrow\; b=-1\\ \text{Para } x=1 \;\Rightarrow\; 3a+3b=3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}b=-1\\ a=2\end{array}$$

b) La igualdad se comprueba del siguiente modo.

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{x^2-x-2} \Rightarrow A(x+1)+B(x-2)=5x-4$$

Utilizando el principio de identidad de polinomios obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Para } x=2 \;\Rightarrow\; 3A=6\\ \text{Para } x=-1 \;\Rightarrow\; -3B=-9\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}A=2\\ B=3\end{array}$$

24. En cada caso queda:

a) Obtenemos las raíces de los polinomios a partir de su descomposición factorial:

$A(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1) \;\Rightarrow\;$ Las raíces son $x=-1$ y $x=2$.
$B(x)=x(x+2)^2 \;\Rightarrow\;$ Las raíces son $x=0$ y $x=-2$.
$C(x)=x(x^2+9) \;\Rightarrow\;$ La raíz es $x=0$.

b) En cada uno de los tres casos:

i) El polinomio que tiene como raíces $x=1$, $x=2$ y $x=3$ es: $P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$.

ii) El polinomio que tiene como raíces $x=0$ y $x=1$ doble es: $P(x)=a\,x(x-1)^2$.

iii) El polinomio que tiene como raíces $x=0$ doble y $x=-1$ triple doble es de la forma siguiente: $P(x)=a\,x^2(x+1)^3$.

c) El polinomio es: $P(x)=x+2$.

25. En cada uno de los casos queda:

a) Operando obtenemos:

$(x^2+1)^2-(x^2-1)^2=x^4+2x^2+1-(x^4-2x^2+1)=4x^2 \;\Rightarrow\;$ Luego esta igualdad es cierta.

b) Operando obtenemos:

$\dfrac{x-1}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{\dfrac{x-1}{x}}=x \;\Rightarrow\;$ Luego esta igualdad es cierta.