1. Calcular el **valor numérico del polinomio** P(x) para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para x=1

b) $P(x)=x^3+1$, para x=-1

c) $P(x)=x^2+x+2$, para x=2

d) $P(x)=-x^2-x-2$, para x=-2

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 0; **c)** 8; **d)** –4)*

2. En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo P(1)=7 *(Soluc: k= –11)*

b) $P(x)=-2x^4-6x^3+kx+29$, siendo P(-2)=35 *(Soluc: k=5)*

c) $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$, siendo P(-4)=58 *(Soluc: k= -3306)*

d) $P(x)=3x^3+kx^2+x+1$, siendo P(-1)=-3 *(Soluc: k=0)*

e) $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$, siendo P(1/2)=125 *(Soluc: k=2105/16)*

Sumas, restas y productos de polinomios:

3. **Sumar** convenientemente **monomios semejantes**:

a) $2x-5x+7x+x=$

b) $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c) $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d) $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e) $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

f) $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g) $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

h) $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

*(Soluc: **a)** 5x; **b)** $-5x^2$; **c)** $4x^2y$; **d)** 0; **e)** $2x^2y^2+4x^2y+xy^2$; **f)** $5x^3yz$; **g)** $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$; **h)** $2xy^3+3x^3y$)*

4. Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar P(x)+Q(x) y P(x)–Q(x)

a) P(x)+Q(x)= *(Soluc: $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$)*

b) P(x)–Q(x)= *(Soluc: $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$)*

5. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) P(x)+Q(x)+R(x)= *(Soluc: $6x^3+13x^2-5x+11$)*

b) P(x)–Q(x)–R(x)= *(Soluc: $2x^3-x^2+x-5$)*

c) P(x)+3Q(x)–2R(x)= *(Soluc: $10x^3-8x^2-x+22$)*

6. Efectuar los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $(-2x^3)\cdot\left(\frac{4}{5}x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)=$ *(Soluc : $-\frac{4}{5}x^6$)*

b) $\left(-\frac{5}{7}x^7\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x^2\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}x\right)=$ *(Soluc : $\frac{4}{7}x^{10}$)*

c) $5x^3\cdot 3x^2y\cdot(-4xz^3)=$ *(Soluc : $-60x^6yz^3$)*

d) $-3ab^2\cdot 2ab\cdot(-\frac{2}{3}a^2b)=$ *(Soluc : $4a^4b^4$)*

e) $(3x^4-2x^3+2x^2+5)\cdot 2x^2=$ *(Soluc : $6x^6-4x^5+4x^4+10x^2$)*

f) $(-2x^5+3x^3-2x^2-7x+1)\cdot(-3x^3)=$ *(Soluc : $6x^8-9x^6+6x^5+21x^4-3x^3$)*

g) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}\right)\cdot 12x^2=$ *(Soluc : $8x^5-18x^4+\frac{48}{5}x^3-15x^2$)*

h) $\left(\frac{1}{2}ab^3-a^2+\frac{4}{3}a^2b+2ab\right)\cdot 6a^2b=$ *(Soluc : $3a^3b^4-6a^4b+8a^4b^2+12a^3b^2$)*

7. **Extraer** el <u>máximo</u> **factor común** posible:

a) $4x^2-6x+2x^3=$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-3)$)*

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y=$ *(Soluc: $3x^2y(4x^2y+2y^3-5x)$)*

c) $-3xy-2xy^2-10x^2yz=$ *(Soluc: $xy(-3-2y-10xz)$)*

d) $-3x+6x^2+12x^3=$ *(Soluc: $3x(4x^2+2x-1)$)*

e) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3=$ *(Soluc: $2ab(b-2a^2+4a^3b^2)$)*

f) $2x^3+4x^2-8x=$ *(Soluc: $2x(x^2+2x-4)$)*

g) $6x^3y^2-3x^2yz+9xy^3z^2=$ *(Soluc: $3xy(2x^2y-xz+3y^2z^2)$)*

h) $-2x(x-3)^2+4x^2(x-3)=$ *(Soluc: $2x(x-3)(x+3)$)*

8. Efectuar los siguientes **productos**:

a) $(3x^2+5x--6)\ (8x^2-3x+4)$ *(Soluc: $24x^4+31x^3-51x^2+38x-24$)*

b) $(5x^3-4x^2+x-2)\ (x^3-7x^2+3)$ *(Soluc: $5x^6-39x^5+29x^4+6x^3+2x^2+3x-6$)*

c) $(2x^4-3x^2+5x)\ (3x^5-2x^3+x-2)$ *(Soluc: $6x^9-13x^7+15x^6+8x^5-14x^4-3x^3+11x^2-10x$)*

d) $(ab^2+a^2b+ab)\ (ab-ab^2)$ *(Soluc: $a^3b^2+a^2b^2-a^2b^4-a^3b^3$)*

e) $(-x^6+x^5-2x^3+7)\ (x^2-x+1)$ *(Soluc: $-x^8+2x^7-2x^6-x^5+2x^4-2x^3+7x^2-7x+7$)*

f) $(x^2y^2-2xy)\ (2xy+4)$ *(Soluc: $2x^3y^3-8xy$)*

g) $10\,(x-5+y-5) + (10-x)\,(10-y)$ *(Soluc: xy)*

h) $(x^2-4x+3/2)\,(x+2)$ *(Soluc: $x^3-2x^2-13x/2+3$)*

i) $(x^2+5x/2+35/3)\,(x-6)$ *(Soluc: $x^3-7x^2/2-10x/3-70$)*

j) $(2x^2+4x+2)\,(x-1/2)$ *(Soluc: $2x^3+3x^2-1$)*

9. Efectuar las siguientes **operaciones combinadas**:

a) $(2x^2+x+3/2)\,(2x^2-3) + 8x+7/2$ *(Soluc: $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1$)*

b) $(3x^3+5x^2/2-3x+13)\,(2x^2+2) - (-6x+24)$ *(Soluc: $6x^5+5x^4+31x^2+2$)*

c) $(3x^2-6x+1)\,(x^3-2x/3+2) + 14x/3$ *(Soluc: $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2$)*

d) $-x/3+1/3 + (2x^2-x/3-2/3)\,(3x^2+2)$ *(Soluc: $6x^4-x^3+2x^2-x-1$)*

10. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) $[R(x)]^2$ **b)** $P(x)-Q(x)\cdot R(x)$ **c)** $P(x)\cdot[Q(x)+R(x)]$ **d)** $P(x)\cdot Q(x)\cdot R(x)$

*(Soluc: **a)** $49x^4--28x^3+18x^2-4x+1$; **b)** $-14x^5+4x^4+9x^3-45x^2+13x-4$; **c)** $8x^6+40x^5+26x^4+6x^3+75x^2-25x+24$
d) $56x^8+68x^7-72x^6+224x^5+244x^4-179x^3+225x^2-59x+21$)*

Identidades notables:

11. Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2$

b) $(x-3)^2$

c) $(x+2)\,(x-2)$

d) $(3x+2)^2$

e) $(2x-3)^2$

f) $(5x+4)\,(5x-4)$

g) $(x^2+5)^2$

h) $(-2x+5)\,(2x+5)$

i) $(x^3-2)^2$

j) $(x^2-1)\,(x^2+1)$

k) $(2x^2+3x)^2$

l) $(2x^2-3)^2$

m) $(-x-3)^2$

n) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

o) $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2$

p) $(-x^2+3)^2$

q) $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)$

r) $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$

s) $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2$

t) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)$

u) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2$

v) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)$

w) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2$

x) $\left(24-\frac{7}{4}x\right)^2$

*(Soluc: **n)** $x^2+x+\frac{1}{4}$; **o)** $4a^2-6a+\frac{9}{4}$; **q)** $1-\frac{x^2}{4}$; **r)** $4x^2+3x+\frac{9}{16}$; **s)** $\frac{9}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{16}$; **t)** $4-\frac{a^2}{9}$;
u) $\frac{9}{4}x^2-3+\frac{1}{x^2}$; **v)** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{9}$; **w)** $\frac{9}{4}x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}$; **x)** $576-84x+\frac{49}{16}x^2$)*

12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)$

b) $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)$

c) $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2$

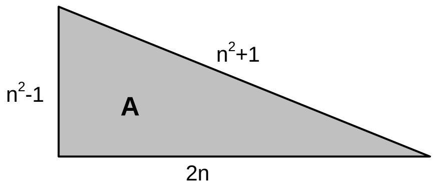
d) $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)$

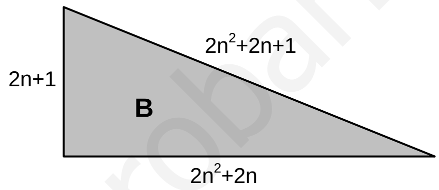
e) $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2$

f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)$

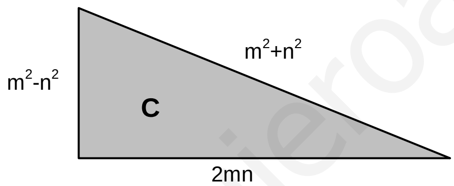
*(Soluc: **a)** $2x^2+2x-3$; **b)** $5x^2-6x+26$; **c)** $3x^2-2x-10$; **d)** $-4x^2-8x+4$; **e)** $-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$; **f)** $-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$)*

13. El matemático griego Pitágoras (siglo VI a.C) conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a $n\in \mathbb{N}$:



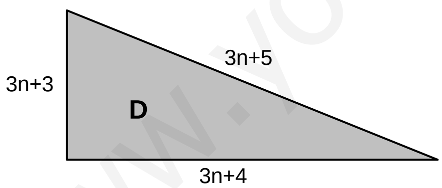


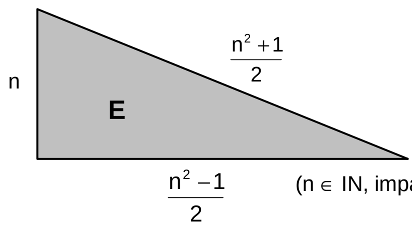
Por su parte, Euclides (s. III a.C.) conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



$(m,n \in \mathbb{N},\ m>n)$

Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:





$(n \in \mathbb{N}$, impar$)$

Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

14. Demostrar que $(a^2+b^2)\,(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

15. Probar que la diferencia entre los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es siempre el cuádruple de un impar. Comprobarlo con ejemplos.

Potencia de un binomio:

16. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

a) $(x+2)^4$ **b)** $(x^2+3)^6$ **c)** $(2x^2+3y)^6$ **d)** $(2x^3+5)^5$

e) $(2x^4+5x)^5$

f) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

g) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^5$

h) $(a-b)^5$

i) $(x-3)^3$

j) $(3x-2)^4$

k) $(x^2-3x)^5$

l) $(3x-2y)^6$

m) $(2x^2-4)^4$

n) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^5$

o) $(2-3x^2)^5$

p) $\left(2x-\dfrac{1}{3}\right)^4$

q) $(2x-3)^6$

r) $\left(\dfrac{x}{2}-3\right)^6$

s) $(-x-1)^4$

t) $(2x-1)^5$

u) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$

v) $\left(\dfrac{x}{3}-3\right)^5$

*(Sol: **a)** $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$; **b)** $x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$; **c)** $64x^{12}+576x^{10}y+2160x^8y^2+4320x^6y^3+4860x^4y^4+2916x^2y^5+729y^6$; **d)** $32x^{15}+400x^{12}+2000x^9+5000x^6+6250x^3+3125$; **e)** $32x^{20}+400x^{17}+2000x^{14}+5000x^{11}+6250x^8+3125x^5$; **f)** $x^4+4x^2+6+4/x^2+1/x^4$; **g)** $x^5+5x^4/2+5x^3/2+5x^2/4+5x/16+1/32$; **h)** $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$; **i)** $x^3-9x^2+27x-27$; **j)** $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$; **k)** $x^{10}-15x^9+90x^8-270x^7+405x^6-243x^5$; **l)** $729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$; **m)** $16x^8-128x^6+384x^4-512x^2+256$; **n)** $x^5-5x^4/2+5x^3/2-5x^2/4+5x/16-1/32$; **o)** $32-240x^2+720x^4-1080x^6+810x^8-243x^{10}$; **p)** $16x^4-32x^3/3+8x^2/3-8x/27+1/81$; **q)** $64x^6-576x^5+2160x^4-4320x^3+4860x^2-2916x+729$; **r)** $x^6/64-9x^5/16+134x^4/16-135x^3/2+1215x^2/4-729x+729$)*

Cociente de polinomios:

17. Efectuar los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $\dfrac{4x^3}{2x^2}=$

b) $8x^4:\left(-2x^2\right)=$

c) $\dfrac{7x^5}{2x^3}=$

d) $-8x^3:\left(2x^2\right)=$

e) $-8x^3:2x^2=$

f) $\dfrac{-3x^7}{-9x^4}=$

g) $6x^3y^4:\left(2x^2y\right)=$

h) $\dfrac{\frac{2}{3}x^2y^2z}{\frac{3}{2}xy^2}=$

i) $\dfrac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c}=$

j) $\dfrac{6x^5-9x^2+3x}{3x}=$

k) $\dfrac{-12x^4+6x^3-4x^2}{-2x^2}=$

l) $\dfrac{-6x^8-7x^4-\frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3}=$

m) $\dfrac{-8x^9+\frac{3}{2}x^5-x^4}{-\frac{3}{7}x^4}=$

n) $(-18x^3yz^3):(6xyz^3)=$

o) $\dfrac{-3a(a^3b)+5a^4b}{-a^2b}=$

p) $\dfrac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y}=$

*(Soluc: **j)** $2x^4-3x+1$; **k)** $6x^2-3x+2$; **l)** $18x^5/5+21x/5+9/20$; **m)** $56x^5/3-7x/2+7/3$; **n)** $-3x^2$; **o)** $-2a^2$; **p)** $3x^2y^2/2$)*

18. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado mediante la regla D=d·C+R:

1. $x^4-x^3+7x^2+x+15 \;\big|\; x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-x+5$; $R(x)=3x+5$)*

2. $2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \;\big|\; 2x^2-3$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+1$; División exacta)*

3. $6x^4-10x^3+x^2+11x-6 \;|\underline{\,2x^2-4x+3\,}$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+x-2$; División exacta)*

4. $x^3+2x^2+x-1 \;|\underline{\,x^2-1\,}$ *(Soluc: $C(x)=x+2$; $R(x)=2x+1$)*

5. $8x^5-16x^4+20x^3-11x^2+3x+2 \;|\underline{\,2x^2-3x+2\,}$ *(Soluc: $C(x)=4x^3-2x^2+3x+1$; División exa*

6. $x^4+3x^3-2x+5 \;|\underline{\,x^3+2\,}$ *(Soluc: $C(x)=x+3$; $R(x)=-4x-1$)*

7. $x^5-2x^4+3x^2-6 \;|\underline{\,x^4+1\,}$ *(Soluc: $C(x)=x-2$; $R(x)=3x^2-x-4$)*

8. $x^2 \;|\underline{\,x^2+1\,}$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)= -1$)*

9. $3x^6+2x^4-3x^2+5 \;|\underline{\,x^3-2x+4\,}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+8x-12$; $R(x)=13x^2-56x+53$)*

10. $x^8 \;|\underline{\,x^2+1\,}$ *(Soluc: $C(x)=x^6-x^4+x^2-1$; $R(x)=1$)*

11. $x^3-4x^2+5x-8 \;|\underline{\,x-2\,}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

12. $x^2+1 \;|\underline{\,x^2-4x+13\,}$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)= 4x-12$)*

13. $2x^5+3x^2-6 \;|\underline{\,x+3\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R(x)= -465$)*

14. $6x^2-5 \;|\underline{\,3x\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x$; $R(x)= -5$)*

15. $x^4-7x^3+8x^2-2 \;|\underline{\,x-1\,}$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

16. $2x-1 \;|\underline{\,2\,}$ *(Soluc: $C(x)=x$; $R(x)= -1$)*

17. $3x^5-x^4+8x^2-5x-2 \;|\underline{\,x^2-x+1\,}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2-x+5$; $R(x)=x-7$)*

18. $4x+1 \;|\underline{\,2x\,}$ *(Soluc: $C(x)=2$; $R(x)= 1$)*

19. $5x^4-2x^3+x-7 \;|\underline{\,x^2-1\,}$ *(Soluc: $C(x)=5x^2-2x+5$; $R(x)=-x-2$)*

20. $1+x \;|\underline{\,1-x\,}$ *(Soluc: $C(x)= -1$; $R(x)= 2$)*

21. $4x^5-3x^3+5x^2-7 \quad 2x^2-3x+5$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+3x^2-2x-8$; $R(x)=-14x+33$)*

22. $9x^3+3x^2-7x+2 \;|\underline{\,3x^2+5\,}$ *(Soluc: $C(x)=3x+1$; $R(x)=-22x-3$)*

23. $4x^4-3x^2+5x-7 \;|\underline{\,2x^2+x-3\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2-x+2$; $R(x)=-1$)*

24. $4x^5+3x^3-2x^2+5 \;|\underline{\,2x^2-x+3\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+x^2-x-3$; $R(x)=14$)*

25. $6x^4+5x^2-3x+8 \;|\underline{\,3x^3-2x-3\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x$; $R(x)=9x^2+3x+8$)*

26. $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1 \;|\underline{\,2x^2-3\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x+3/2$; $R(x)=8x+7/2$)*

27. $8x^4+3x^3+2x-2 \;|\underline{\,4x^2+x-3\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/4+23/16$; $R(x)=21x/16+37/16$)*

28. $2x^5-x^3+3x-9 \;|\underline{\,2x^2-x+2\,}$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x^2/2-5x/4-9/8$; $R(x)=35x/8-27/4$)*

29. $6x^3-3x^2+2x-5 \;|\underline{\,3x-2\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/3+8/9$; $R(x)=-29/9$)*

30. $4x^4-x^3+x+5 \;|\underline{\,2x^2-x+3\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2-11/4$; $R(x)=-13x/4+53/4$)*

31. $6x^4+3x^3-5x^2+x-8 \;|\underline{\,3x^2-5x+2\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+13x/3+38/9$; $R(x)=121x/9-148/9$)*

32. $8x^4-3x^2+7x-5 \;|\underline{\,4x^2-3x+2\,}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+3x/2-5/8$; $R(x)=17x/8-15/4$)*

33. $6x^5+5x^4+31x^2+2 \;\underline{|\; 2x^2+2}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+5x^2/2-3x+13$; $R(x)=6x-24$)*

34. $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2 \;\underline{|\; 3x^2-6x+1}$ *(Soluc: $C(x)=x^3--2x/3+2$; $R(x)=14x/3$)*

35. $6x^4-x^3+2x^2-x-1 \;\underline{|\; 3x^2+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2--x/3-2/3$; $R(x)=-x/3+1/3$)*

36. $4x^4 \;\underline{|\; 2x^2-1}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+1$; $R(x)=1$)*

37. $4x^4+x^3-x+1 \;\underline{|\; 2x^2-1}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2+1$; $R(x)=-x/2+2$)*

19. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea $C(x)=x^2-3x+1$, el resto sea $R(x)=x-1$ y el dividendo un polinomio de 4º grado.

Regla de Ruffini:

20. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado:

1. $x^4-7x^3+8x^2-2 \;\underline{|\; x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

2. $x^3-4x^2+5x-8 \;\underline{|\; x-2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

3. $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \;\underline{|\; x-2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$; $R=24$)*

4. $2x^5+3x^2-6 \;\underline{|\; x+3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R=-465$)*

5. $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \;\underline{|\; x-4}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$; $R=37$)*

6. $2x^4-10x+8 \;\underline{|\; x+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$; $R=60$)*

7. $10x^3-15 \;\underline{|\; x+5}$ *(Soluc: $C(x)=10x^2-50x+250$; $R=-1265$)*

8. $x^3-2x^2-13x/2+3 \;\underline{|\; x+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+3/2$; División exacta)*

9. $x^3-2x^2-3x \;\underline{|\; x+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+5$; $R=-10$)*

10. $x^3-7x^2/2-10x/3-70 \;\underline{|\; x-6}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+5x/2+35/3$; División exacta)*

11. $x^3-2x^2 \;\underline{|\; x+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+8$; $R=-16$)*

12. $x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \;\underline{|\; x+3}$ $\left(\text{Soluc}: C(x)=x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{63}{2};\ R(x)=\frac{191}{2}\right)$

13. $x^3+2x^2+3x+1 \;\underline{|\; x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; $R=7$)*

14. $x^4-2x^3+x^2+3x+1 \;\underline{|\; x-2}$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+5$; $R=11$)*

15. $x^3+a^3 \;\underline{|\; x+a}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-ax+a^2$; $R=0$)*

16. $x^3+x^2+x+1 \;\underline{|\; x+1}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+1$; División exacta)*

17. $x^3-a^3 \;\underline{|\; x-a}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+ax+a^2$; $R=0$)*

18. $2x^4+x^3-2x^2-1 \;\underline{|\; x+2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-3x^2+4x-8$; $R=15$)*

19. $1+x \mid \underline{1-x}$ *(Soluc: C(x)=–1; R=2)*

20. $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \mid \underline{x-3}$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-x^2+x-2$; División exacta)*

21. $x^3+2x^2+3x \mid \underline{x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; R=6)*

22. $x^5+1 \mid \underline{x-1}$ *(Soluc: $C(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; R=2)*

23. $2x^3+3x^2-1 \mid \underline{x-1/2}$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+4x+2$; División exacta)*

24. $x^3-5x^2+3x \mid \underline{x}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-5x+3$; División exacta)*

25. $3x^3+2x^2+2x-1 \mid \underline{x-1/3}$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+3x+3$; División exacta)*

26. $x^4+x^3-x^2+x-1 \mid \underline{x+2}$ *(Soluc: $C(x)=x^3-x^2+x-1$; R=1)*

27. $2x^3-x^2-x-3 \mid \underline{2x-3}$ *(Soluc: $C(x)=x^2+x+1$; División exacta)*

(Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)

28. $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \mid \underline{x-a}$ *(Soluc: $C(x)=ax^2-2a^2x$; R=1)*

Teorema del resto:

RECORDAR:

TEOREMA DEL RESTO: "El resto de la división de P(x) por x-a coincide con el valor numérico P(a)"

Ejemplo: Al efectuar la división de $P(x)=x^2+x-2$ entre $x-1$ se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que $P(1)=0$

Utilidad: El th. del resto permite predecir, **sin necesidad de efectuar la división**, si se trata de una división exacta.

21. Comprobar el **teorema del resto** mediante las primeras divisiones del ejercicio anterior.

22. Dado $P(x)=2x^2-x-3$, comprobar si es divisible por $x+1$ o por $x-2$ mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible? *(Soluc: SÍ; NO; 2x–3)*

23. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \mid \underline{x-3}$ sea –1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. *(Soluc: a=–3)*

24. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3-3x^2+2x-10 \mid \underline{x-4}$ *(Soluc: NO)*

b) $x^3-x^2+x+14 \mid \underline{x+2}$ *(Soluc: SÍ)*

c) $x^6-1 \mid \underline{x-1}$ *(Soluc: SÍ)*

d) $x^5-3x^3+2x \mid \underline{x-4}$ *(Soluc: NO)*

25. Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $x^3+8x^2+4x+m \mid \underline{x+4}$ *(Soluc: m=–48)*

b) $2x^3-10x^2+mx+25 \mid \underline{x+5}$ *(Soluc: m=–5)*

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \,\underline{|\,x-2}$ *(Soluc: m=−7)*

d) $mx^2-3x-744 \,\underline{|\,x-8}$ *(Soluc: m=12)*

e) $x^2+4x-m \,\underline{|\,x+3}$ *(Soluc: m=−3)*

f) $x^3-5x^2+m \,\underline{|\,x-1}$ *(Soluc: m=4)*

g) $5x^4+2x^2+mx+1 \,\underline{|\,x-3}$ *(Soluc: m=−424/3)*

h) $x^5-4x^3+mx^2-10 \,\underline{|\,x+1}$ *(Soluc: m=7)*

Teorema del factor:

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x−a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x−a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que P(x) es divisible por x−1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

26. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99}+1 \,\underline{|\,x+1}$ es exacta. *(Soluc: Al hacer P(−1), sale 0)*

27. Comprobar que x^2-2x-3 es divisible por x−3 sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: P(x)=(x−3)(x+1))*

28. Estudiar si $P(x)=x^2+x-2$ es divisible por x+2 y/o por x−3, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: divisible por x+2 pero no por x−3)*

29. Estudiar si $P(x)=x^5-32$ es divisible por x−2 sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división). *(Soluc: Sí es divisible)*

30. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$ es divisible por x−1? ¿Por qué?

31. **TEORÍA:** Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

Factorización de polinomios de cualquier grado por Ruffini:

32. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide:
i) Obtener sus raíces y comprobarlas.
ii) A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.
iii) Comprobar dicha factorización.

a) x^2-5x+6 **b)** x^2-2x-8 **c)** x^2-6x+9 **d)** $4x^2+23x--6$ **e)** x^2+x+1 **f)** $6x^2-7x+2$

33. Dados los siguientes polinomios se pide: **i)** Obtener sus raíces por Ruffini. **ii)** Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x) **iii)** Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ *(Soluc: x=-1,2,3)*

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$ *(Soluc: x=1doble,−3)*

c) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ *(Soluc: x=−1,2,3,4)*

d) $P(x)=x^4-2x^2+1$ *(Soluc: x=−1doble,1doble)*

e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$ *(Soluc: x=±2,−1/2,1/3)*

34. Sabiendo que una de sus raíces es x=1/2, factorizar $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

35. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

i) Resolverlas por Ruffini.

ii) Comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación.

iii) A partir de sus raíces, factorizar el polinomio y comprobar dicha factorización.

1. $x^3-6x^2+11x-6=0$ *(Soluc: x=1,2,3)*

2. $x^3+x^2-9x-9=0$ *(Soluc: x=−1,−3,3)*

3. $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$ *(Soluc: x=−2, ±3, 4)*

4. $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$ *(Soluc: x=−4, 1 doble, 3)*

5. $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$ *(Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)*

6. $3x^3+x^2-8x+4=0$ *(Soluc: x=−2,1,2/3)*

7. $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ *(Soluc: x=±1,±2,3)*

8. $x^4-5x^2+4=0$ *(Soluc: x=±1,±2) (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

9. $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$ *(Soluc: x=−3,−1,0,2)*

10. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ *(Soluc: x=1, ±2, -3)*

11. $x^3-5x^2-5x-6=0$ *(Soluc: x=6)*

12. $x^3+2x^2-2x-4=0$ *(Soluc: x=−2, ±√2)*

13. $x^5-2x^4-x+2=0$ *(Soluc: x=±1,2)*

14. $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ *(Soluc: x=0,1,2,3)*

15. $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$ *(Soluc: x=−1,−3,2/3,3/2)*

16. $\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{1}{x^2}$ *(Soluc: x=1, 1±√3)*

17. $x^3+3x^2-10x-24=0$ *(Soluc: x=−4,−2,3)*

18. $x^3+2x^2-15x-36=0$ *(Soluc: x=−3 doble,4)*

19. $x^3-3x^2+3x-1=0$ *(Soluc: x=1 triple)*

20. $x^3-8=0$ *(Soluc: x=2)*

36. Dados los siguientes polinomios, se pide:

i) Obtener sus raíces reales por Ruffini.

ii) Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x)

iii) Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización.

1. $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$ *(Soluc: x=−2,−1)*

2. $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ *(Soluc: x=−2,1/2,1/3)*

3. $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$ *(Soluc: x=−1,2)*

4. $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ *(Soluc: x=2,3,±1)*

5. $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ *(Soluc: x=1,2)*

6. $P(x)=x^4-5x^2+4$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

7. $P(x)=x^4-5x^2-36$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

8. $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ *(Soluc: x=−1,3)*

9. $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$ *(Soluc: x=2,−3)*

10. $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ *(Soluc: x=−1 doble,2,3)*

11. $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$ *(Soluc: x=±1,4/3,3/4)*

12. $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$ *(Soluc: x=0, 1)*

13. $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ *(Soluc: x=1)*

14. $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$ *(Soluc: x=±1)*

15. $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$ *(Soluc: carece de raíces ε Q)*

16. $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$ *(Soluc: x=1,2 doble,−2)*

17. $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$ *(Soluc: x=1, −2, 2/3, −3/2)*

18. $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ *(Soluc: x=±1,−3 doble)*

CONSECUENCIA:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: "Un polinomio de grado *n* tiene a lo sumo *n* raíces reales"

37. Resolver la ecuación $2x^3-3x^2=-\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 *(Soluc: x=±1/2, 3/2)*

38. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$ *(Sol: x=2)*

39. ¿Serías capaz de resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar Tartaglia y Ruffini… *(Sol: x=1)*

40. Resolver: **a)** $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ y-x^2=1\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=2)* **b)** $\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\\ y=\sqrt{x^3}\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1; y=1)*

41. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones x=−2, x=1 y x=3

42. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2

43. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: P(-1)=P(2)=P(−3)=0 y P(−2)=18

44. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. *(Soluc: 1 raíz)*

45. Demostrar de dos formas (por Ruffini u operando directamente) que:

$$x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)$$

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

El francés René Descartes (1596-1650) encontró un método para predecir el número de raíces de un polinomio ordenado: « La cantidad de raíces positivas de f(x)=0 es el número de variaciones del *signo de los coeficientes de f(x) o disminuido en ese número en una cantidad par, y de raíces negativas es el número de variaciones del signo de los coeficientes de f(-x) o disminuido en ese número en una cantidad par» (es importante insistir en que, para poder aplicar la regla, el polinomio f(x) ha de estar ordenado).*

Ejemplos:

$f(x)=x^2 + x - 12$ tiene un cambio de signo, del 2º al 3er término $\Rightarrow$ tiene una raíz positiva (sus raíces son -4 y 3)

$f(x)=x^3 - 4x^2 + x + 6$ tiene dos cambios de signo $\Rightarrow$ tiene dos raíces positivas (raíces -1, 2 y 3)

$f(x)=x^4 - 5x^2 + 4$ tiene dos raíces positivas (raíces ± 1 y ± 2)

$f(x)=x^3 + 4x^2 + 3x$ no tiene cambios de signo $\Rightarrow$ no tiene raíces reales positivas (raíces 0, -1 y -3)

$f(x)=x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, ¿cuántas raíces positivas tiene como máximo?