5 Inecuaciones

ACTIVIDADES INICIALES

5.I. Ordena de menor a mayor los siguientes números.

a) $\frac{11}{4}, \frac{68}{25}, \frac{14}{5}$ y $\frac{27}{10}$

b) $0,1\overset{\frown}{2}, \frac{11}{90}, \frac{3}{25}$ y $0,12$

a) $\frac{11}{4} = \frac{275}{100}$; $\frac{68}{25} = \frac{272}{100}$; $\frac{14}{5} = \frac{280}{100}$ y $\frac{27}{10} = \frac{270}{100} \Rightarrow \frac{27}{10} < \frac{68}{25} < \frac{11}{4} < \frac{14}{5}$

b) $0,1\overset{\frown}{2} = \frac{11}{90} = \frac{55}{450}$; $0,12 = \frac{3}{25} = \frac{54}{450} \Rightarrow 0,12 = \frac{3}{25} < \frac{11}{90} = 0,1\overset{\frown}{2}$

5.II. Sean a y b dos números reales positivos tales que $a \leqslant b$. Demuestra que el inverso de a es mayor o igual que el inverso de b.

$$a \leqslant b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} \leqslant b \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow 1 \leqslant \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{b} \leqslant \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1. Comprueba en cada caso si el valor indicado forma parte de la solución de la inecuación.

a) $x = -2$ de la inecuación $x^3 + x^2 + x \leqslant 6$

b) $x = -\frac{1}{2}$ de la inecuación $2(x - 2) + \frac{x-1}{3} > x - 1$

a) $(-2)^3 + (-2)^2 + (-2) = -8 + 4 - 2 = -6 \leqslant 6 \Rightarrow$ Sí pertenece a la solución.

b) $\left.\begin{array}{l} 2\left(-\frac{1}{2} - 2\right) + \dfrac{-\frac{1}{2} - 1}{3} = -5 - \frac{1}{2} = -\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{11}{2} < -\frac{3}{2} \Rightarrow$ No pertenece a la solución.

5.2. Resuelve las inecuaciones lineales siguientes.

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leqslant \frac{x}{2}$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6}$

c) $x + 2(x + 1) + 3(x + 2) < \frac{x + 38}{2}$

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leqslant \frac{x}{2} \Rightarrow 4x - 12 - x + 2 \leqslant 4x \Rightarrow -x \geqslant 10 \Rightarrow x \geqslant -10 \Rightarrow$ Solución: $[-10, +\infty)$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6} 12x - 18 - 3x > 6x + 3x + 1 \Rightarrow 0x > 19 \Rightarrow$ Solución: $\varnothing$

c) $x + 2(x+1) + 3(x+2) < \frac{x+38}{2} \Rightarrow 2x + 4x + 4 + 6x + 12 < x + 38 \Rightarrow 11x < 22 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow$ Solución: $(-\infty, 2)$

5.3. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 2 \geqslant 0$

b) $4 - x^2 < 0$

c) $-x^2 - 1 \cdot 0$

d) $3x^2 - x \geqslant x^2 - 5x$

e) $\frac{2}{3}x^2 + 4x < 2x$

f) $-x^2 - 2x - 1 \cdot 0$

a) R

b) $(-\infty, -2\ ) \cup (2, +\infty)$

c) [

d) $(-\infty, -2\ ] \cup [0, +\infty)$

e) $(23, 0)$

f) $\varnothing$

5.4. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones.

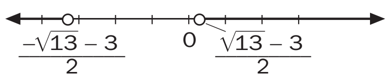
a) $3x(1 + x) - 2(x^2 - 1) > 3$

b) $x^2 - \frac{3}{2}x \leqslant 1$

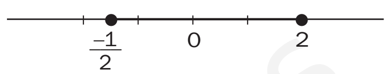
c) $\frac{x^2}{2} + \frac{x - 1}{3} \geqslant 3$

d) $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x < \frac{5}{4}x^2 + \frac{x}{2}$

a) $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{13} - 3}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{13} - 3}{2}, +\infty\right)$

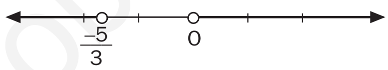


b) $\left[\frac{-1}{2}, 2\right]$



c) $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{61} - 1}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{61} - 1}{3}, +\infty\right)$

d) $\left(-\infty, \frac{-5}{3}\right) \cup (0, +\infty)$



5.5. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas y representa gráficamente las soluciones.

a) $x^3 - 6x^2 + 7x + 15 \geqslant x^2$

b) $x^3 - 3x^2 < 1 - 3x$

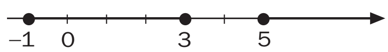
c) $x^4 - 17x^2 \leqslant 16$

d) $x(x^2 + 3x) > 6x + 8$

e) $x^3 + 6x^2 + 5x \leqslant 12$

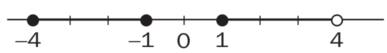
f) $2(x + 1)^4 - 8x^3 > 8(x + 3) - 8$

a) $[-1, 3] \cup [5, +\infty)$

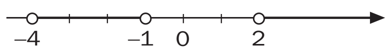


b) $(-\infty, 1)$

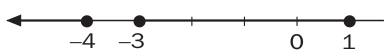
c) $[-4, -1] \cup [1, 4]$



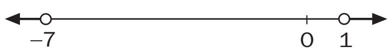
d) $(-4, -1) \cup (2, +\infty)$



e) $(-\infty, -4] \cup [-3, 1]$



f) $(-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$



5.6. Representa en la recta real las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales:

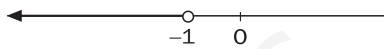
a) $\dfrac{4x - 5}{4x^2 - x - 5} < 0$

b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 1} < 0$

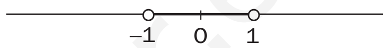
c) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} \geqslant 0$

d) $1 > \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

a) $\dfrac{4x - 5}{4x^2 - x - 5} < 0 \Rightarrow \dfrac{4x - 5}{(4x - 5)(x + 1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x + 1} < 0 \Rightarrow$
$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1)$



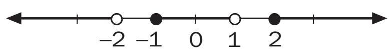
b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 1} < 0 \Rightarrow \dfrac{(x + 2)^2}{x^2 - 1} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2 - 1} < 0 \Rightarrow$
$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow (-1, 1)$



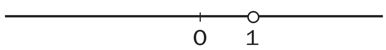
c) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)} \geqslant 0$

Factores	$-\infty$ -2	-1	1	2	$+\infty$
$x + 1$	−	−	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	−	+
$x - 1$	−	−	−	+	+
$x + 2$	−	+	+	+	+
$\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$	+	−	+	−	+

$(-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$



d) $1 > \dfrac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 > 2x \Rightarrow (x - 1)^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$



5.7. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 2x + 1 < x + 2 \\ 3x - 1 \leqslant 4x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4 > x \\ x \geqslant 2x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x - (1 + x) \\ 3(x + 2) \geqslant 2(x - 4) \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3 - x > 2(x - 4) \\ 5x + 3 > -(x - 1) \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 1 < x + 2 \\ 3x - 1 \leqslant 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow [-1, 1)$

b) $\begin{cases} 3x - 4 > x \\ x \geqslant 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 4 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$ No tiene solución

c) $\begin{cases} 3x - 1 < x - 1 \\ 3x + 6 \geqslant 2x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -14 \end{cases} \Rightarrow (-14, 0)$

d) $\begin{cases} -3x > -5 \\ 6x > -2 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$

5.8. Representa las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x}{2} > x - \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x-1}{4} \leqslant 1 \\ 2x - 3 < 3x - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - \dfrac{x}{5} > 3x - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{x+2}{6} \leqslant 2 \\ 2x - 3 < 3x - 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x}{2} > x - \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x-1}{4} \leqslant 1 \\ 2x - 3 < 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2x > 4x - 1 \\ 2x + 2 + x - 1 \leqslant 4 \\ 2x - 3x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > -1 \\ 3x \leqslant 3 \\ -x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x \leqslant 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right]$

b) $\begin{cases} 3x - \dfrac{x}{5} > 3x - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{x+2}{6} \leqslant 2 \\ 2x - 3 < 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x}{5} > \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{5x}{6} \leqslant \dfrac{4}{3} \\ -x < 1 \end{cases} \Rightarrow \left(-1, \dfrac{8}{5}\right]$

5.9. Representa los semiplanos formados por las soluciones de las siguientes inecuaciones.

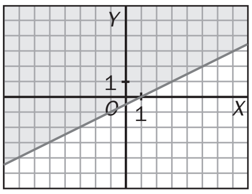
a) $x - 2y < 1$

b) $3x + y \geqslant 2$

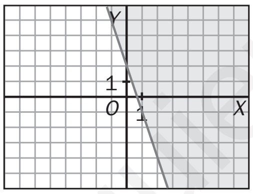
c) $x + 3y \leqslant 2x + 4 - 3y$

d) $5x + 3y + 10 < 2x + 2$

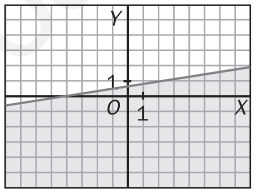
a)



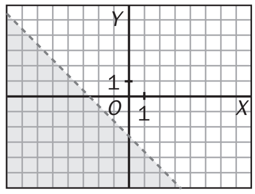
b)



c)

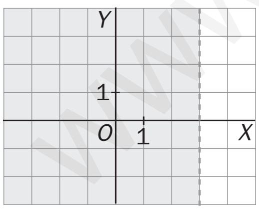


d)

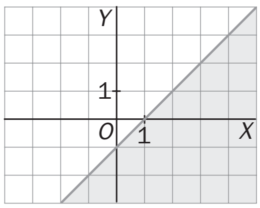


5.10. Escribe en cada apartado una inecuación de la que sea solución el semiplano representado.

a)



b)



a) $x < 3$

b) $y \leqslant x - 1$

5.11. Expresa mediante un sistema de inecuaciones los siguientes subconjuntos del plano.

a) Puntos pertenecientes al segundo cuadrante.

b) Puntos con ordenada positiva que están por encima de la bisectriz del primer cuadrante.

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

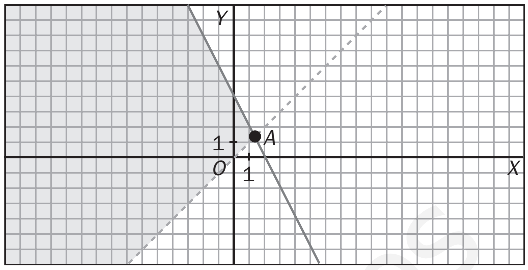
b) $\begin{cases} y > 0 \\ y > x \end{cases}$

5.12. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} y < -2x + 4 \\ y \geq x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \\ 4x + 3y \leq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \\ 2x + y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

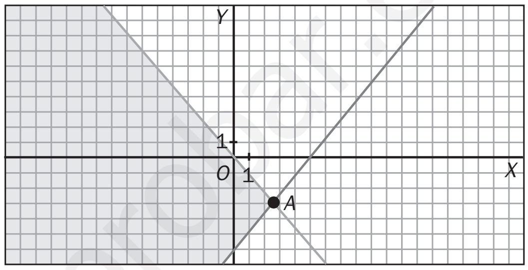
a) Vértices:

$A \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$



b) Vértices:

$A \begin{cases} 6x - 5y \leq 30 \\ 4x + 3y < 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{45}{19}, \frac{60}{19}\right)$



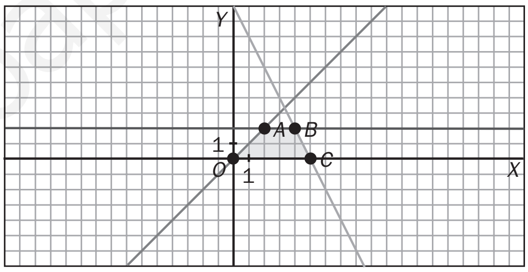
c) Vértices:

$A \begin{cases} y = x \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2, 2)$

$B \begin{cases} 2x + y = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4, 2)$

$C \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(5, 0)$

$O(0, 0)$



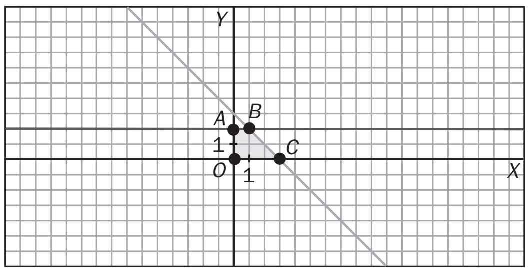
d) Vértices:

$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0, 2)$

$B \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(1, 2)$

$C \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow C(3, 0)$

$O(0, 0)$



5.13. En la población de un territorio se han producido, en un período de tiempo determinado, las siguientes variaciones medidas sobre la población inicial:

- 2,5% de nacimientos
- 2,25% de defunciones
- 0,5% de emigrantes
- 0,75% de inmigrantes

¿Entre qué valores estará la población final si la inicial estaba entre 45 000 y 46 000 habitantes?

Sea x la población inicial: entonces $45\,000 < x < 46\,000$. Nos piden entre qué valores estará.

$$P = x + 0{,}025x - 0{,}0225x - 0{,}005x + 0{,}0075x = 1{,}005x$$

Entonces tendremos que $45\,000 \cdot 1{,}005 < P < 46\,000 \cdot 1{,}005$, es decir, $45\,225 < P < 46\,230$.

5.14. En la fabricación de un hectómetro de cable del tipo *A* se utilizan 16 kg de plástico y 4 kg de cobre, y en la de un hectómetro de cable de tipo *B*, 6 kg de plástico y 12 de cobre. Representa gráficamente las posibilidades de producción si se debe fabricar más cable de tipo A que de tipo *B* y se cuenta con 252 kg de plástico y 168 de cobre.

Material	Plástico	Cobre
Tipo *A*	16	4
Tipo *B*	6	12

x: hm de cable de tipo *A*

y: hm de cable de tipo *B*

$$\begin{cases} 16x + 6y \leqslant 252 \\ 4x + 12y \leqslant 168 \\ x > y \\ x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 3y \leqslant 126 \\ x + 3y \leqslant 42 \\ x > y \\ x \geqslant 0 \ y \geqslant 0 \end{cases}$$

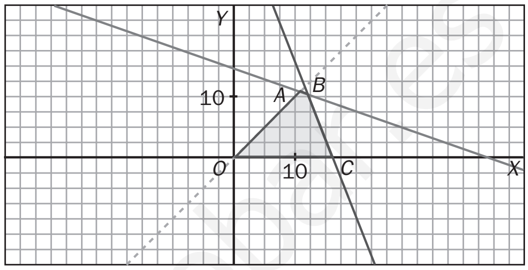
Vértices:

$$A \equiv \begin{cases} y = x \\ x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow A(10{,}5;\ 10{,}5)$$

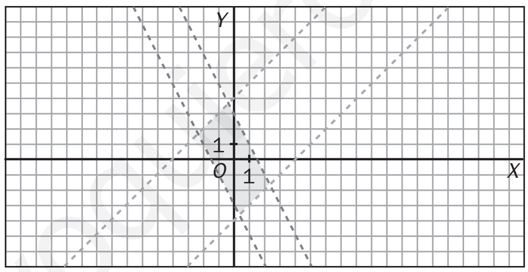
$$B \equiv \begin{cases} 8x + 3y = 126 \\ x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow B(12,\ 10)$$

$$C \equiv \begin{cases} 8x + 3y = 126 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(15{,}75;\ 0)$$

$O(0,\ 0)$



5.15. Representa la región del plano determinada por el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} |2x + y| < 3 \\ |x - y| < 4 \end{cases}$

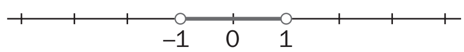


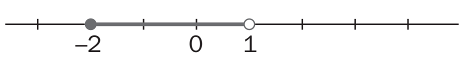
EJERCICIOS

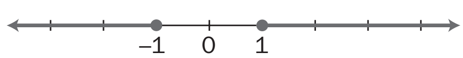
Inecuaciones lineales

5.16. Escribe en cada apartado una inecuación que tenga por solución el intervalo o semirrecta dado.

a)


c)


b)


d)


a) $x > 1$

c) $-1 < x < 1$

b) $-2 \leqslant x < 1$

d) $\begin{cases} x \leqslant -1 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

5.17. Indica si los números -10, -2, -1, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{5}$, 0, $\frac{3}{5}$, 1 y 5 son soluciones de la inecuación $\frac{8}{3}x + 2 \geqslant 0$.

Basta sustituir cada número en la expresión y comprobar si se verifica la desigualdad.

No son solución: -10, -2 y -1. Sí lo son el resto.

5.18. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales, expresa las soluciones en forma de intervalo y represéntalas sobre la recta real.

a) $\frac{8}{3}x + 2 \geqslant 0$

b) $2x - \sqrt{2} \leqslant 0$

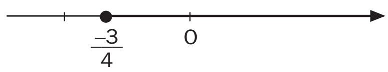
c) $-x + 1 > -\frac{10}{7}$

d) $2x - \frac{9x}{4} < \frac{x}{3}$

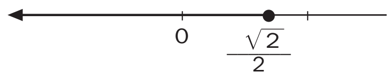
e) $\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} < x + 1$

f) $\frac{x}{1 - \sqrt{2}} > 2$

a) $\left[\frac{-3}{4}, +\infty\right)$



b) $\left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

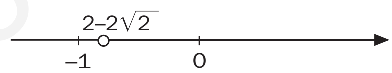


c) $\left(-\infty, \frac{17}{10}\right)$

d) $(-\infty, 0)$

e) $\left(-\frac{10}{11}, +\infty\right)$

f) $(2 - 2\sqrt{2}, +\infty)$



5.19. Expresa mediante intervalos las soluciones de las siguientes inecuaciones.

a) $3(2x - 5) - 4(x - 2) \leqslant 2 - 4x$

b) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} > 1 - \frac{2x-5}{2}$

c) $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} + \frac{x-3}{18} \geqslant -\frac{8}{9}$

d) $\frac{2x-1}{3} + \frac{5x-1}{2} < \frac{26}{3}$

a) $3(2x - 5) - 4(x - 2) \leqslant 2 - 4x \Rightarrow 3x + 6x - 15 - 4x + 8 \leqslant 2 - x \Rightarrow 6x \leqslant 9 \Rightarrow x \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

b) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} > 1 - \frac{2x-5}{2} \Rightarrow 3x - x + 1 > 6 - 6x + 15 \Rightarrow 8x > 20 \Rightarrow x > \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

c) $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} + \frac{x-3}{18} \geqslant -\frac{8}{9} \Rightarrow 12x + 12 - 9x - 18 + 2x - 6 \geqslant -32 \Rightarrow 5x \geqslant -20 \Rightarrow [-4, +\infty)$

d) $\frac{2x-1}{3} + \frac{5x-1}{2} < \frac{26}{3} \Rightarrow \frac{6\,(2x-1)}{3} + \frac{6\,(5x-1)}{2} < \frac{6 \cdot 26}{3} \Rightarrow 2\,(2x-1) + 3\,(5x-1) < 52$

$\Rightarrow 4x - 2 + 15x - 3 < 52 \Rightarrow 19x - 5 < 52 \Rightarrow 19x < 57 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow (-\infty, 3)$

5.20. Halla y representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + x - 12 \geqslant 0$

b) $-2x^2 + 3x > 0$

c) $4x^2 - 1 < 0$

d) $6x^2 + x - 1 < 0$

e) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$

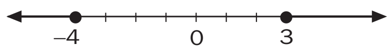
f) $2x^2 + x + 1 < 0$

g) $6 - x^2 < 0$

h) $(3x - 1)(5x + 2) \geqslant 0$

a) $x^2 + x - 12 \geqslant 0$, entonces $(x + 4)(x - 3) \geqslant 0$

Solución: $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

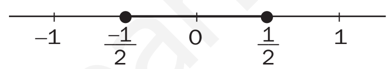


b) $-2x^2 + 3x > 0$, entonces $x(-2x + 3) > 0$

Solución: $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

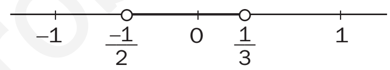
c) $4x^2 - 1 \leqslant 0$, entonces $x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$

Solución: $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$



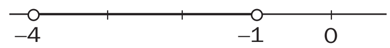
d) $6x^2 + x - 1 < 0$, entonces $6\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) < 0$

Solución: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$



e) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$, entonces $-2(x + 4)(x + 1) > 0$

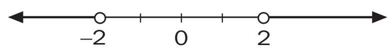
Solución: $(-4, -1)$



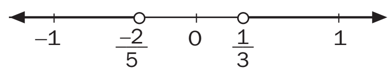
f) $2x^2 + x + 1 < 0$. Como $2x^2 + x + 1 = 0$, no tiene soluciones reales; entonces, solución: $\varnothing$.

g) $-x^2 < -4$, es decir, $x^2 > 4$.

Solución: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



h) Las soluciones son: $\left(-\infty, -\dfrac{2}{5}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.



5.21. Simplifica y resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $(x - 2)^2 + 5 \leqslant 2x$

b) $\dfrac{3x - 6}{5} < \dfrac{4x - 2x^2}{10}$

c) $5x^2 + 1 \geqslant \dfrac{3x^2 - 1}{2}$

d) $3x^2 + \dfrac{5}{6}x - 2x < 2x^2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{2}$

e) $(x - 2)^2 + (x + 4)(x - 2) + 3x \geqslant -1$

f) $\dfrac{x^2 - 2}{2} - \dfrac{3x - 1}{5} + x > 2$

a) $(x - 2)^2 + 5 \leqslant 2x \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leqslant 0 \Rightarrow (x - 3)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \{3\}$

b) $6x - 12 < 4x - 2x^2 \Rightarrow (-3, 2)$

c) $10x^2 + 2 \geqslant 3x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{R}$

d) $x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{2}{3} < 0 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, 2\right)$

e) $(x - 2)^2 + (x + 4)(x - 2) + 3x \geqslant -1 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow \left(-\infty, -\ 258\right] \cup [0{,}58, +\infty)$

f) $\dfrac{x^2 - 2}{2} - \dfrac{3x - 1}{5} + x > 2 \Rightarrow 5x^2 + 4x - 28 > 0 \Rightarrow 5(x - 2)\left(x + \dfrac{14}{5}\right) > 0 \Rightarrow \left(-\infty, \dfrac{-14}{5}\right) \cup (2, +\infty)$

5.22. Dados dos números reales a y b tales que $a < b$, completa la tabla de signos y resuelve las inecuaciones.

a) $4(x - a)(x - b) > 0$

b) $-2(x - a)(x - b) \leqslant 0$

c) $(x - a)(x - b) < 0$

d) $(x - a)^2 \geqslant 0$

	$-\infty$ … a	a … b	b … $+\infty$
$x + a$			
$x - b$			
$(x - a)(x - b)$			

a)

	$-\infty$ … a	a … b	b … $+\infty$
$x - a$	$-$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$+$
$4(x - a)(x - b)$	$+$	$-$	$+$

$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

b)

	$-\infty$ … a	a … b	b … $+\infty$
$x - a$	$-$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$+$
$-2(x - a)(x - b)$	$-$	$+$	$-$

$(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$

c)

	$-\infty$ … a	a … b	b … $+\infty$
$x - a$	$-$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$+$
$(x - a)\ (x - b)$	$+$	$-$	$+$

$(a\ ,\ b)$

d)

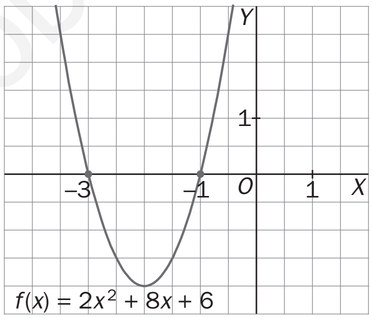
	$-\infty$ … a	a … $+\infty$
$x - a$	$-$	$+$
$(x - a)^2$	$+$	$+$

$(-\infty, +\infty)$

5.23. Resuelve las inecuaciones dadas observando la gráfica de la función polinómica $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$.

a) $x^2 + 4x + 3 < 0$

b) $-x^2 - 4x - 3 > 0$



a) $(-3, -1)$

b) $(-3, -1)$

Inecuaciones polinómicas

5.24. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^3 - 4x > 0$

b) $x^3 - 3x - 2 < 0$

c) $x^4 - 1 \geqslant 0$

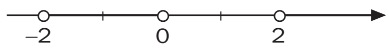
d) $x^3 - 7x + 6 < 0$

e) $x^4 - 5x^2 \geqslant 36$

f) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \leqslant 0$

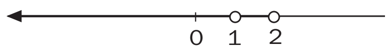
a) $x^3 - 4x > 0$, entonces $x(x - 2)(x + 2) > 0$

Solución: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



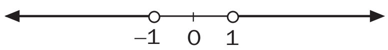
b) $x^3 - 3x - 2 < 0$, entonces $(x - 2)(x + 1)^2 < 0$

Solución: $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$



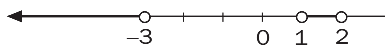
c) $x^4 - 1 \geqslant 0$, entonces $(x^2 - 1)(x^3 + 1) \geqslant 0$

Solución: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



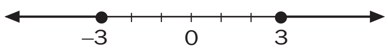
d) $x^3 - 7x + 6 < 0$, entonces $(x - 2)(x - 1)(x + 3) < 0$

Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, 2]$



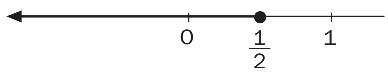
e) $x^4 - 5x^2 \geqslant 36$, entonces $(x^2 + 4)(x - 3)(x + 3) \geqslant 0$

Solución: $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



f) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \leqslant 0$, entonces $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1) \leqslant 0$

Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$



5.25. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $2x^4 - 8x^3 > 2x^2 + 12$

b) $x^5 - 8x^4 + 23x^3 > 12 - 28x$

c) $x^2(x^2 + 1) + 2x^3 - 5x > x(x^3 - 4x + 1)$

a) $2(x^4 - 4x^3 - x^2 + 6) > 0$. Solución: $(-\infty;\ 1{,}17) \cup (4{,}14;\ +\infty)$

b) $x^5 - 8x^4 + 23x^3 + 28x - 12 > 0$. Solución: $(0{,}39;\ +\infty)$

c) $x(2x^4 + 5x - 6) > 0$. Solución: $\left(\frac{-\sqrt{73}-5}{4},\ 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{73}-5}{4},\ +\infty\right)$

5.26. Escribe un polinomio de grado cuatro que sea positivo en $(-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$ y negativo en el resto de la recta real.

$$(x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

5.27. Dado $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, donde a, b y c son números reales tales que $a < b < c$, halla los intervalos de x para los que el valor numérico del polinomio es:

a) Estrictamente positivo.

b) Negativo o nulo.

	$-\infty$ a	a b	b c	c $+\infty$
$x - a$	−	+	+	+
$x - b$	−	−	+	+
$x - c$	−	−	−	+
$(x - a)(x - b)(x - c)$	−	+	−	+

a) $(a, b) \cup (c, +\infty)$

b) $(-\infty, a] \cup [b, c]$

Inecuaciones racionales

5.28. Expresa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{5x - 2}{2x + 1} \geqslant 0$

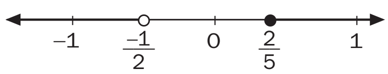
b) $\frac{x^2 - 1}{x + 2} \leqslant 0$

c) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} > 0$

d) $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} < 0$

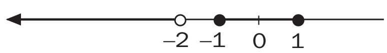
a) $\frac{5x - 2}{2x + 1} \geqslant 0$

Solución: $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$



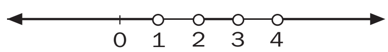
b) $\frac{x^2 - 1}{x + 2} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x + 2} \leqslant 0$

Solución: $(-\infty, -2) \cup [-1, 1]$



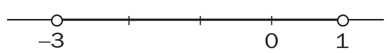
c) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} > 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x-1)}{(x-3)(x-2)} > 0$

Solución: $(-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$



d) $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} < 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)^2}{(x-1)(x+3)^2} < 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} < 0$

Solución: $(-3, 1)$



5.29. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{5x - 2}{2x + 1} \geqslant -2$

b) $\dfrac{x - 1}{x + 3} - 1 > 0$

c) $\dfrac{x^2}{x - 2} \leqslant 2$

d) $\dfrac{x^2 - 3}{x + 3} < x$

a) Solución: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [0, +\infty)$

b) Solución: $(-\infty, -3)$

c) Solución: $(-\infty, 2)$

d) Solución: $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

5.30. Dados los números reales $a < b < c < d$, completa la siguiente tabla de signos.

$-\infty$ a b c $+\infty$

$x - a$				
$x - b$				
$x - c$				
$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}$				
$\dfrac{(x-b)}{(x-c)^2(x-a)}$				

$-\infty$ a b c $+\infty$

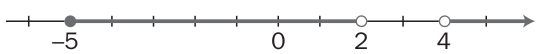
$x - a$	−	+	+	+
$x - b$	−	−	+	+
$x - c$	−	−	−	+
$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}$	−	+	−	+
$\dfrac{(x-b)}{(x-c)^2(x-a)}$	+	−	+	+

5.31. Halla las soluciones de la inecuación $\dfrac{x^2 - kx - 2k^2}{(x + k)(x^2 - k^2)} \geqslant 0$ en función del parámetro k.

$$\frac{(x - 2k)(x + k)}{(x + k)^2(x - k)} \geqslant 0, \text{ de solución } (-k, k) \cup [2k\ +\infty)$$

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

5.32. Escribe un sistema de inecuaciones cuya solución sea el siguiente conjunto de números reales.



$$\begin{cases} x + 5 \geqslant 0 \\ x < 2 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$$

5.33. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} 2x + 3(x - 1) < 7 \\ 3x + 2 \leqslant x + 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x}{2} < 2 \\ 2x + 3(x - 1) > x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3(x - 3) - 2x \leqslant -3 \\ 2x - 3 < x + 3 \\ x \leqslant 5 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3 < 2x + 5 \\ 3 > 2x + 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3 < x < 3 \\ x^2 > 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4 \\ -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ -4 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 3(x - 1) < 7 \\ 3x + 2 \leqslant x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3x - 3 < 7 \\ 3x - x \leqslant 6 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x < 10 \\ 2x \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow (-\infty, 2)$

b) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x}{2} < 2 \\ 2x + 3(x - 1) > x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - x < 4 \\ 2x + 3x - 3 > x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{4}{3} \\ x > \dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{4}{3}\right)$

c) $\begin{cases} -3(x - 3) - 2x \leqslant -3 \\ 2x - 3 < x + 3 \\ x \leqslant 5 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 9 - 2x \leqslant -3 \\ x < 6 \\ x \leqslant 5 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x \leqslant -12 \\ x < 6 \\ x \leqslant 5 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{12}{5} \\ x < 6 \\ x \leqslant 5 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\dfrac{12}{5}, 5\right]$

d) $\begin{cases} -8 < 2x \\ 8 > 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x \\ 4 > x \end{cases} \Rightarrow (-4, 4)$

e) $\begin{cases} x < 3 \\ x > -3 \\ (x - 1)(x + 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow (-3, -1) \cup (1, 3)$

f) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 4 \\ -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ -4 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow [-2, 1]$

Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

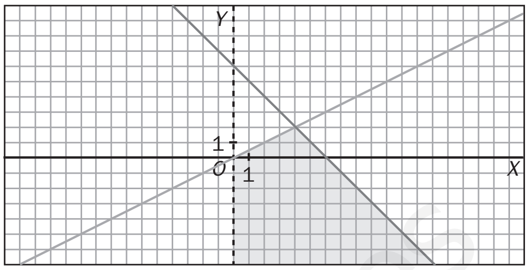
5.34. Comprueba si el par de valores $x = -2$, $y = 3$ es una solución del sistema: $\begin{cases} x + y \leqslant 2 \\ y \leqslant -2x \\ \dfrac{x + 5}{3} < y \end{cases}$

Sustituyendo x por -2 e y por 3, queda $\begin{cases} 1 \leqslant 2 \\ 3 \leqslant 4 \\ 1 < 3 \end{cases}$, con lo que sí es solución.

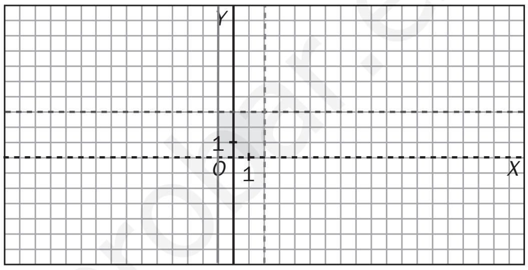
5.35. (TIC) Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} x + y \leqslant 6 \\ 2y \leqslant x \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 4 \geqslant 0 \\ x - 6 \leqslant 0 \\ 3 \leqslant y \\ y \leqslant 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y \geqslant 12 \\ -3x + 4y \leqslant 4 \\ x - 4 \leqslant 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -2x + y \leqslant 2 \\ x \geqslant y - 2 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ y \geqslant 1 \\ x + y < 6 \end{cases}$

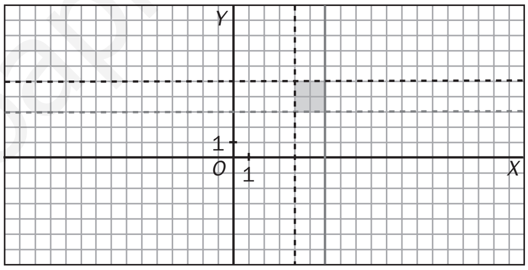
a) Vértices: (0, 0) y (4, 2)



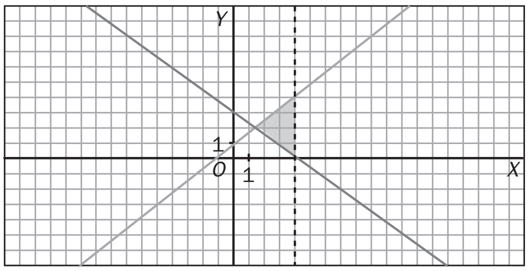
b) Vértices: (−1, 0), (−1, 3), (2, 0) y (2, 3)



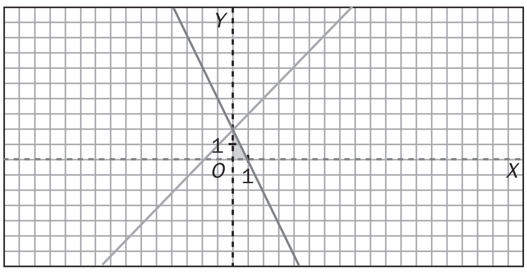
c) Vértices: (4, 3), (4, 5), (6, 3) y (6, 5)



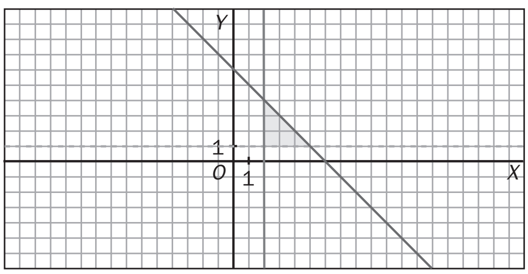
d) Vértices: (4, 0), (4, 4) y $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$



e) Vértices: (0, 0), (1, 0) y (0, 2)



f) Vértices: (2, 1), (5, 1) y (2, 4)



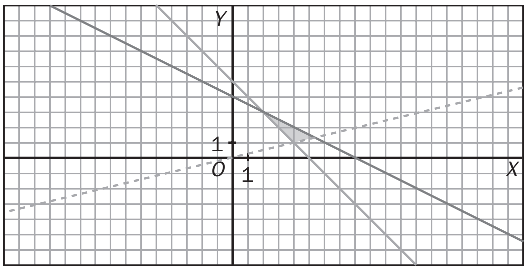
5.36. (PAU) Considera el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \leqslant 8 \\ x + y \geqslant 5 \\ x - 5y \leqslant 0 \end{array}\right\}$$

a) Resuélvelo gráficamente.

b) Encuentra todas sus soluciones enteras.

a) Los vértices son (2, 3), $\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{6}\right)$ y $\left(\frac{40}{7}, \frac{8}{7}\right)$.



b) (4, 2), (4, 1), (5, 1), (3, 2) y (2, 3).

5.37. (PAU) (TIC) a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones: $\begin{cases} 3x + y \leqslant 12 \\ x - 2y \geqslant -3 \\ y > \dfrac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y \geqslant 1 \end{cases}$

b) ¿En qué vértices de esa región la función $f(x, y) = 3x - 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo? Determina esos valores.

a) $A(4, 0)$, $B(3, 3)$, $C(2, -1)$ y $D(-1, 1)$

b) $f(A) = 12$, $f(B) = 3$, $f(C) = 8$ y $f(D) = -5$. Por lo que el máximo es A y el mínimo es D.

5.38. Escribe en cada apartado un sistema de inecuaciones tal que la representación gráfica de su solución sea la indicada.

a) El cuarto cuadrante del plano.

b) Un cuadrado de centro el punto (2, 1) y lado 3.

c) La región del primer cuadrante situada por debajo de la bisectriz.

d) Un rectángulo de base 2 y altura 8 simétrico respecto de los ejes de coordenadas.

e) Un paralelogramo centrado en el origen de coordenadas cuyas diagonales miden 4.

a) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y < x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}5 < x < 3{,}5 \\ -0{,}5 < y < 2{,}5 \end{cases}$

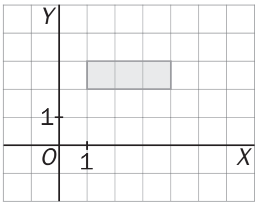
d) $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -4 < y < 4 \end{cases}$

e) Si un paralelogramo tiene las diagonales iguales, entonces en un rectángulo, y como las diagonales miden 4, los lados serán $2a$ y $2b$ con $(2a)^2 + (2b)2 = 4^2$, es decir, $a^2 + b^2 = 4$.

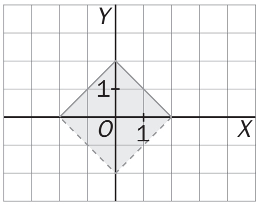
Por tanto, $\begin{cases} -a < x < a \\ -b < x < b \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$

5.39. Expresa mediante sistemas de inecuaciones las regiones sombreadas en las siguientes figuras.

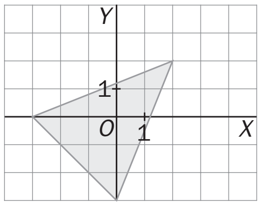
a)



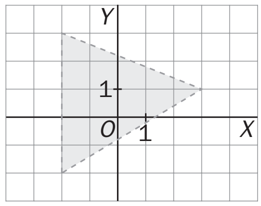
c)



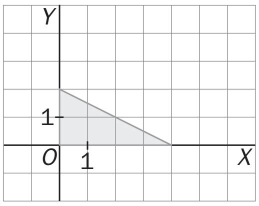
e)



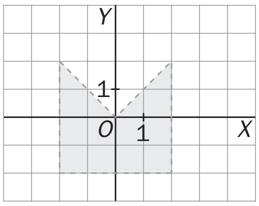
g)



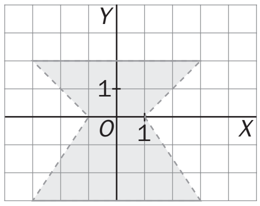
b)



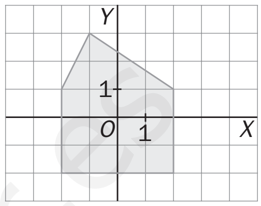
d)



f)



h)



a) $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leqslant x + 2 \\ y \geqslant x - 2 \\ y \leqslant -x + 2 \\ y \geqslant -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y \leqslant \dfrac{2}{5}x + \dfrac{6}{5} \\ y \geqslant -x - 3 \\ y \leqslant \dfrac{5}{2}x - 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y \leqslant \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{11}{5} \\ x \geqslant -2 \\ y \geqslant \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \leqslant -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ y \geqslant -2 \\ y \leqslant -x \\ y \leqslant x \end{cases}$

f) $\begin{cases} y \geqslant \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{3}{2} \\ y \geqslant -x - 1 \\ y \geqslant x - 1 \\ y \leqslant \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \\ -3 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ y \geqslant -2 \\ y \leqslant 2x + 5 \\ y \leqslant \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases}$

PROBLEMAS

5.40. Averigua qué números naturales verifican que al sumarles los dos siguientes se obtiene un número superior a 75.

$x + x + 1 + x + 2 > 75$, entonces $3x + 3 > 75$, luego $x > 24$.

Todos los números naturales superiores a 24 verifican la propiedad.

5.41. ¿Entre qué medidas se debe aumentar el lado de un cuadrado que tiene por área 36 cm² si se quiere que la nueva superficie esté comprendida entre cuatro y nueve veces la inicial?

El lado del cuadrado inicial mide: $l = \sqrt{36} = 6$ cm.

Sea x la medida que se añade al lado del cuadrado, entonces:

$$4 \cdot 36 \leqslant (6 + x)^2 \leqslant 9 \cdot 36 \Rightarrow 144 \leqslant (6 + x)^2 \leqslant 324 \Rightarrow 12 \leqslant 6 + x \leqslant 18 \Rightarrow 6 \leqslant x \leqslant 12$$

Debe añadirse entre 6 y 12 cm.

5.42. Se consideran los rectángulos cuya base mide el doble que la altura. ¿Cuáles verifican que su área está comprendida entre 8 y 72 cm²?

Supongamos que las medidas son $2x$ de base y x de altura.

El área será: $S = 2x \cdot x = 2x^2 \Rightarrow 8 < 2x^2 < 72 \Rightarrow 4 < x^2 < 36 \Rightarrow 2 < x < 6$

La medida de la altura ha de ser un número comprendido entre 2 y 6 cm.

5.43. La nota de una asignatura es la media aritmética de las calificaciones de tres exámenes. Si un alumno ha obtenido un 6 en el primer examen y un 3 en el segundo, ¿cuál es la nota mínima que debe obtener en el tercer examen para aprobar la asignatura?

Sea x la nota del tercer examen. Debe ocurrir que $\dfrac{x + 3 + 6}{3} \geqslant 5$, cuya solución es $x \geqslant 6$.

5.44. Se quiere construir una plaza circular cuya superficie debe estar comprendida entre 5000 y 6000 m². ¿Entre qué dos valores se encuentra el radio de la plaza? ¿Y su perímetro?

Sea x el radio de la plaza. Debe ocurrir que $5000 < \pi x^2 < 6000 \Rightarrow 1591{,}55 < x^2 < 1909{,}86 \Rightarrow 39{,}89 < x < 43{,}7$ metros, y su perímetro estará, por tanto, entre $250{,}51 < 2\pi x < 274{,}58$ metros.

5.45. Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho y está dividido en cuatro parcelas con las siguientes características:

- Sus dimensiones son números enteros.
- La más grande tiene un área de 450 m².
- La más pequeña tiene un área comprendida entre 30 y 40 m².
- Las otras dos parcelas tienen la misma superficie.

¿Cuál es el área total del terreno?

Sea x el área de la parcela más pequeña e y el área de una de las parcelas medianas. Tenemos que $\begin{cases} 30 < x < 40 \\ x < y < 450 \end{cases}$

y que $450 + 2y + x$ es el doble de un cuadrado perfecto $2k^2$, por lo que x debe ser par, $x = 2x'$, y queda

$225 + y + x' = k^2$, con $\begin{cases} 15 < x' < 20 \\ 2x' < y < 450 \end{cases}$

Entonces, $225 + 30 + 15 < k^2 < 225 + 450 + 20 \Rightarrow 270 < k^2 < 695 \Rightarrow 17 \leqslant k \leqslant 26$.

Por tanto, el área total $2k^2$ puede ser 578, 648, 722, 800, 882, 968, 1058, 1152, 1250, 1352 m².

5.46. Un montañero puede caminar a una velocidad comprendida entre 4 y 6 km/h dependiendo de la mayor o menor dificultad del terreno. Averigua entre qué valores oscila el tiempo que tardará en recorrer una senda de 25 km.

$$4 \leqslant v \leqslant 6 \Rightarrow 4 \leqslant \frac{e}{t} \leqslant 6 \Rightarrow 4 \leqslant \frac{25}{t} \leqslant 6 \Rightarrow \begin{cases} 4 \leqslant \dfrac{25}{t} \Rightarrow t \leqslant \dfrac{25}{4} = 6{,}25 = 6 \text{ h } 15 \text{ min} \\ \dfrac{25}{t} \leqslant 6 \Rightarrow t \geqslant \dfrac{25}{6} = 4 \text{ h } 10 \text{ min} \end{cases}$$

Deberá caminar entre 4 h 10 min y 6 h 15 min.

5.47. En un territorio, el crecimiento de la población se ajusta a un modelo exponencial:

$$P_f = P_i\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t.$$

Si actualmente la población es de 25 000 personas, ¿cuál debe ser la tasa mínima de crecimiento para que en cinco años pase a ser de 30 000?

$P_i = 25\,000$, y queremos que ocurra que $30\,000 \leqslant 25\,000\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^5 \Rightarrow r = 3{,}71$

5.48. Al comprar 8 bolígrafos se pagó con un billete de 5 euros, pero no se recuerda a cuánto ascendía la vuelta. Otro cliente fue a comprar 12 bolígrafos de la misma clase, pero tuvo que volver a casa, ya que los 6 euros y 50 céntimos que llevaba para pagar no eran suficientes. ¿Qué se puede decir del precio de un bolígrafo?

Precio de cada bolígrafo = x céntimos de euro. Entonces: $\begin{cases} 8x < 500 \\ 12x > 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 62{,}5 \\ x > 54{,}16 \end{cases}$

Por tanto, el precio de cada bolígrafo está entre 55 y 62 céntimos de euro.

5.49. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos posibles modelos de contrato. El modelo *A* consiste en pagar una cantidad fija de 50 euros además de 8 céntimos de euro por cada kilómetro recorrido. El modelo *B* consiste en pagar 80 euros sin limitación de kilometraje.

¿A partir de cuántos kilómetros interesa el alquiler según el modelo *B*?

x = número de km a recorrer. $50 + 0{,}08x > 80 \Rightarrow x > \dfrac{30}{0{,}08} = 375 \Rightarrow$ A partir de 375 km.

5.50. La función de demanda, x_D, correspondiente al mercado de alquiler de ciertas herramientas de bricolaje es para un precio, p_x, comprendido entre 15 y 19 euros:

$$x_D = -\frac{3}{10}p_x^2 - \frac{119}{10}p_x + 123$$

Calcula los precios para los que la demanda es inferior a 6 unidades.

$$x_D < 6 \Rightarrow -3p_x^2 - 119p_x - 1170 > 0 \Rightarrow 18 < p_x < \frac{65}{3}$$

Como además $15 < p_x < 19$, entonces para $18 < p_x < 19$, la demanda es inferior a 6 unidades.

5.51. El nivel de alcohol, N, en sangre de una persona que ha bebido hace 30 minutos tres cuartos de litro de cerveza en función de su peso, x, en kilogramos es: $N = \dfrac{400}{7x}$

La ley de tráfico establece fuertes multas para aquellas personas que conduzcan con un nivel superior a 0,5. Indica qué personas podrían conducir a los 30 minutos de haber bebido tres cuartos de litro de cerveza.

$N = \dfrac{400}{7x} < 0{,}5 \Rightarrow 400 < 3{,}5x \Rightarrow x > \dfrac{400}{3{,}5} = 114{,}3$. Las que superen los 114,3 kg de peso.

5.52. Una empresa precisa repartidores de pizzas y ofrece las siguientes opciones de contrato:

- Se cobrará una cantidad mensual fija de 350 euros más 3 euros por cada pizza repartida.
- Sueldo fijo de 600 euros, independiente del número de pizzas repartidas.

Calcula el número mínimo de pizzas que se han de repartir para que convenga escoger la primera opción.

Sea x = número de pizzas. Entonces: $350 + 3x > 600 \Rightarrow x > 83{,}3$. A partir de 84 pizzas.

5.53. Se quieren confeccionar camisetas deportivas de dos calidades, que se diferencian en la proporción de algodón y de fibra sintética que se utiliza.

La tabla siguiente da la composición de cada tipo de camiseta:

	Unidades de algodón	Unidades de fibra sintética
Calidad extra	4	1
Calidad media	2	3

Para confeccionar todas las camisetas se dispone de un total de 260 unidades de algodón y de 190 unidades de fibra sintética.

a) Determina, de forma gráfica, las diferentes posibilidades que hay de producir las camisetas.

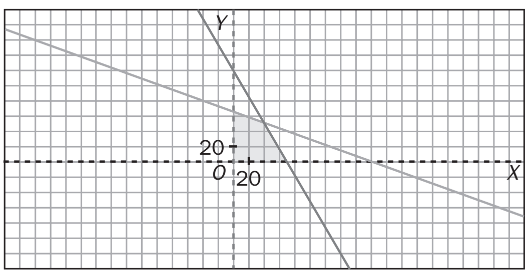
b) ¿Es posible confeccionar 50 camisetas de calidad extra y 40 de calidad media?

a) x = camisetas tipo A, y = camisetas tipo B

$$\begin{cases} 4x + 2y \leqslant 260 \\ x + 3y \leqslant 190 \\ x \geqslant 0 \; y \geqslant 0 \end{cases}$$

Vértices $A(0;\ 63{,}3)$, $B(40,\ 50)$ y $C(65,\ 0)$

b) No es posible.



5.54. Un alimento tiene las siguientes características en su composición:

- Tiene el triple de masa de grasa que de hidratos de carbono.
- La masa de las proteínas es 16 veces la masa de los hidratos de carbono.
- En 100 g del alimento hay entre 20 y 30 g de hidratos de carbono, proteínas y grasas en total.

a) Determina las diferentes posibilidades de la composición de 100 g de ese alimento.

b) ¿Puede ocurrir que haya 0,5 g de hidratos de carbono, 8 g de proteínas y 1,5 g de grasas?

c) ¿Puede ocurrir que haya 1,25 g de hidratos de carbono, 20 g de proteínas y 3,75 g de grasas?

a) En 100 gramos de alimento: x g de hidratos de carbono, $3x$ g de grasa y $16x$ g de proteínas.

Por tanto: $20 \leqslant x + 3x + 16x \leqslant 30 \Rightarrow 20 \leqslant 20x \leqslant 30 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$

Entre 1 y 1,5 g de hidratos de carbono, entre 3 y 4,5 g de grasa y entre 16 y 24 g de proteínas.

b) No es posible, ya que no se verifican todas las condiciones.

c) Sí es posible.

5.55. El tratamiento de una enfermedad requiere la administración de dos sustancias curativas, *C* y *D*. Cada semana es preciso consumir por lo menos 30 mg de *C* y 42 mg de *D*. Estas sustancias están incluidas en dos tipos de comprimidos diferentes, *G* y *P*, de la forma siguiente:

- En un comprimido *G* hay 3 mg de *C* y 5 mg de *D*.
- En un comprimido *P* hay 1 mg de *C* y 1 de *D*.

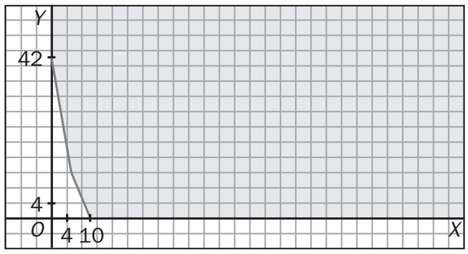
a) Representa gráficamente las posibles formas en que pueden administrarse al paciente las dosis necesarias.

b) Indica si las condiciones se verifican al tomar:

- 1 comprimido *G* cada día de la semana
- 1 comprimido *P* de lunes a viernes
- 2 comprimidos *P* los sábados y domingos

a) x = comprimidos *G*, y = comprimidos *P*

$$\begin{cases} 3x + y \geqslant 30 \\ 5x + y \geqslant 42 \\ x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \end{cases}$$



Vértices $A(0, 42)$, $B(6, 12)$ y $C(10, 0)$

b) 7 comprimidos *G* y 9*P* sí las verifican.

5.56. En unos almacenes de ropa deportiva cuentan con 200 balones y 300 camisetas. Tras un estudio de mercado deciden poner las existencias a la venta en dos tipos de lotes.

El número total de lotes no debe superar los 110 y, en particular, el número máximo de lotes del primer tipo no debe superar los 60.

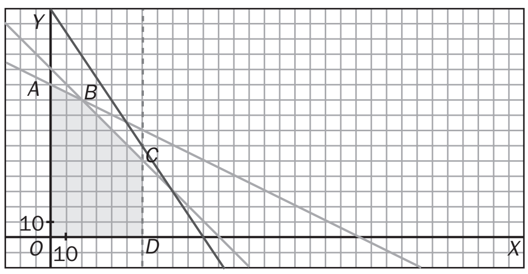
a) Representa las posibles formas de elaborar los lotes.

b) Indica si cada una de las siguientes posibilidades verifica las condiciones:

- 40 del primer tipo y 80 del segundo.
- 40 del primer tipo y 70 del segundo.
- 70 del primer tipo y ninguno del segundo.

a) x = lotes tipo 1, y = lotes tipo 2

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 200 \\ 3x + 2y \leqslant 300 \\ x + y \leqslant 110 \\ 60 \geqslant x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \end{cases}$$



Vértices $A(0, 100)$, $B(20, 90)$, $C(60, 50)$ y $D(60, 0)$

b) No, sí y no, respectivamente.

PROFUNDIZACIÓN

5.57. Utilizando el desarrollo del cuadrado de una diferencia, demuestra que la media aritmética de dos números reales positivos es superior o igual a su media geométrica.

Aplicando el desarrollo del cuadrado de una diferencia:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$$

Simplificando y despejando en la última expresión:

$$a + b - 2\sqrt{a \cdot b} \geqslant 0 \Rightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

5.58. Sea a un número positivo y diferente de la unidad, demuestra que la suma de *a* con su inverso es superior a 2. Utiliza el desarrollo del cuadrado de la diferencia entre la raíz cuadrada de un número y su inversa

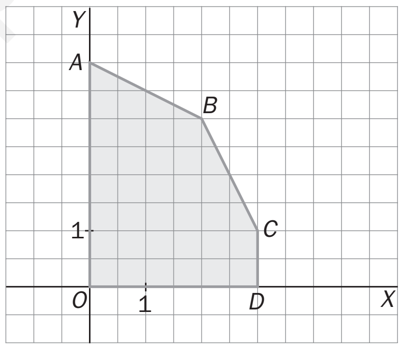
Sea a cualquier número estrictamente positivo y diferente de la unidad.

El cuadrado de $\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ es estrictamente positivo:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = a + \frac{1}{a} - 2 > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 2$$

5.59. La figura muestra la solución del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by \leqslant c \\ dx + ey \leqslant f \\ y \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant g \end{cases}$$



Encuentra valores posibles para *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* y *g*.

La ecuación de la recta que pasa por $A(0, 4)$ y $B(2, 3)$ es:

$$ax + by = c \Rightarrow \begin{cases} 4b = c \\ 2a + 3b = c \end{cases} \Rightarrow 4b = 2a + 3b \Rightarrow b = 2a$$

La ecuación de la recta que pasa por $B(2, 3)$ y $C(3, 1)$ es:

$$df + ey = f \Rightarrow \begin{cases} 2d + 3e = f \\ 3d + e = f \end{cases} \Rightarrow 2d + 3e = 3d + e \Rightarrow d = 2e$$

$$CD \equiv x = 3 \Rightarrow g = 3$$

Por tanto, $\begin{cases} b = 2a \\ c = 8a \\ d = 2e \\ f = 7e \\ g = 3 \end{cases}$, con a y e valores cualesquiera.

Algunos posibles valores son: $a = 1$, $b = 2$, $c = 8$, $d = 2$, $e = 1$, $f = 7$ y $g = 3$.

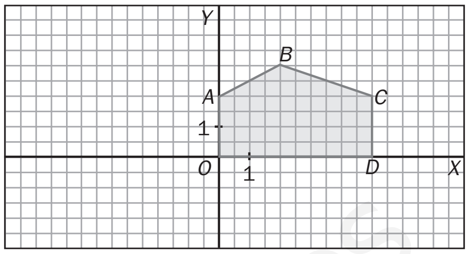
El sistema quedaría: $\begin{cases} x + 2y \leqslant 8 \\ 2x + y \leqslant 7 \\ y \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

5.60. Escribe todas las posibles soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales siendo los valores de las incógnitas obligatoriamente números enteros.

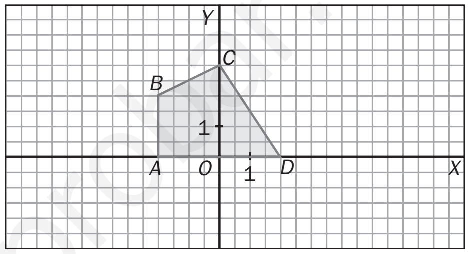
a) $\begin{cases} x - 2y \geqslant -4 \\ x + 3y \leqslant 11 \\ x \leqslant 5 \\ x \geqslant 0 \;\; y \geqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y \geqslant -6 \\ 3x + 2y \leqslant 6 \\ x + 2 \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

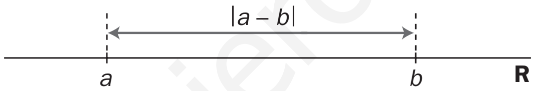
a) Posibles soluciones: (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (2, 3)



b) Posibles soluciones: (−2, 0), (−1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (−2, 1), (−1, 1), (0, 1), (1, 1), (−2, 2), (−1, 2), (0, 2), (0, 3)



5.61. La distancia en la recta real entre los puntos que representan a los números a y b se puede calcular mediante la expresión $d(a, b) = |a - b|$.



a) Calcula la distancia entre los números reales −2 y −6.

b) Calcula el conjunto de números reales x que verifican que $|x - 2| \leqslant 4$.

c) Calcula el conjunto de números reales x que verifican que $|x + 2| \geqslant 4$.

a) $d(-2, -6) = |-2 - (-6)| = |-2 + 6| = 4$

b) Son los números reales x tales que su distancia a 2 sea menor que 4; por tanto, el conjunto buscado es el $(-2, 6)$.

c) Son los números reales x tales que su distancia a −2 sea mayor que 4; por tanto, el conjunto buscado es el $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

5.62. Calcula el conjunto de números reales tales que: $|x - 2| \leqslant |x - 6|$. Para ello:

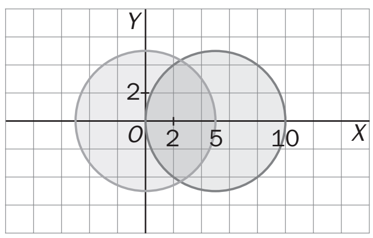
a) Halla el punto que equidista de 2 y de 6.

b) Razona cuáles son los puntos que están más cerca de 2 que de 6.

a) El punto $x = 4$ equidista de 2 y de 6.

b) La inecuación expresa el conjunto de números reales que están más cerca de 2 que de 6. Por tanto, serán los más pequeños que 4: $(-\infty, 4]$.

5.63. Escribe un sistema de inecuaciones que caracterice la región de intersección de las circunferencias de la figura.



$$\begin{cases} (x - 5)^2 + y^2 \leqslant 25 \\ x^2 + y^2 \leqslant 25 \end{cases}$$