Primer trimestre – 1º Bach CCSS
Ecuaciones, inecuaciones, Estudio de Funciones

1. (2,5 puntos). Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} & si \quad x<2 \\ 3 & si\ x=2 \\ \dfrac{5}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$ se pide:

a) Estudiar la continuidad y clasificar las discontinuidades de f.
b) Calcular sus asíntotas horizontales.

2. (1,5 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de la función: $f(x)=\sqrt{x^3-3x^2-x+3}$

4. (1 punto). Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y=f(x)=\ln(x+1)$ en el punto de abscisa x = 0.

5. (1,25 puntos). Calcular las asíntotas de la función $y=f(x)=\dfrac{3x^2}{x+2}$.

6. (1,25 puntos). Calcular los valores de "a" y "b" para que la función siguiente sea continua en todo R.

$$f(x)=\begin{cases} \log_3(x+2) & si \quad x\in(-2,1] \\ 2a+3bx & si\ x\in(1,2) \\ ax^2+bx+1 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

7. (1,25 puntos). Derivar:

a) $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ b) $y=f(x)=\sqrt{x^2+1}-e^{x^2+2x}+3^x$

☼☺**Comodín: (Este ejercicio puede cambiarse por cualquiera de los anteriores)**.
Calcular los máximos, mínimos e intervalos de monotonía de la función:

$$y=f(x)=x^3-2x^2+x$$

1. (2,5 puntos). Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} & si \quad x<2 \\ 3 & si \; x=2 \\ \dfrac{5}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$ se pide:

a) Estudiar la continuidad y clasificar las discontinuidades de *f*.

- <u>Zona $(-\infty, 2)$</u>: f coincide aquí con $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$. Las funciones elementales son continuas en su dominio, por lo que g es continua en todo R salvo los puntos que anulan el denominador, que son:

$$x^2-x-2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} =-1 \\ =2 \end{cases}$$

La discontinuidad de g en $x = 2$ no nos incumbe, puesto que $2 \notin (-\infty, 2)$, que es la zona donde coincide con la función en estudio, que es f. Pero la otra, $x = -1$, hay que estudiarla, y eso hacemos:

1) $\nexists f(-1)$.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \left(\dfrac{-6}{0}\right)=\infty$. Calculamos los límites laterales para delimitar el signo del ∞. Ambos límites dan ∞, porque el límite completo da dicho resultado. Pero en los laterales se puede calcular el signo de dicho infinito. Una forma muy cómoda de hacerlo es tomar un valor de x muy próximo a -1, a izquierda o a derecha, según el límite lateral calculado, y obtener el signo del resultado. Así:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=+\infty$$

Por ello, en $x = -1$ f presenta una discontinuidad <u>asintótica de salto infinito</u>.

- <u>Zona $(2, +\infty)$</u>: f coincide con $h(x) = 5/x$, que, al ser elemental, es continua en su dominio, que es R – {0}. Pero como $0 \notin (2, +\infty)$, es discontinuidad de h pero no de f. Luego <u>f es continua en $(2, +\infty)$</u>.
- <u>$x = 2$</u>: 1) $\exists f(2) = 3$. 2) Para calcular el límite de f cuando x tiende a 2, hay que, forzosamente, estudiar los límites laterales, puesto que la fórmula de f es diferente a izquierda y a derecha de 2. Así

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{5}{x}=\frac{5}{2}$$

Como los dos límites laterales existen pero no coinciden, se trata de una discontinuidad <u>asintótica de salto finito</u>.

En definitiva, f es continua en R – {–1, 2}, con discontinuidades asintótica de salto infinito en -1 y de salto finito en 2.

b) Calcular sus asíntotas.

- <u>Asíntotas horizontales</u>: Puede haber una distinta por cada lado, puesto que la definición de f es diferente al tender a $-\infty$ y a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1 \;\Rightarrow$ La recta horizontal de ecuación $\boxed{y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to -\infty}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = \left(\dfrac{5}{\infty}\right) = 0 \;\Rightarrow$ La recta $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal}}$ <u>cuando $x \to +\infty$</u>.

- <u>Asíntotas verticales</u>: Lo tenemos casi hecho, por el estudio anterior de la continuidad de la función. Puede tener asíntotas verticales en $x = -1$ y en $x = 2$, porque son los puntos de discontinuidad. Como sabemos que:

  $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \infty \;\Rightarrow$ La recta $\boxed{x = -1 \text{ es asíntota vertical}}$.

  $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = +\infty \;\Rightarrow$ La recta $\boxed{x = 2 \text{ es asíntota vertical}}$ <u>a la izquierda de 2 solamente</u>.

- <u>Asíntotas oblicuas</u>: Como tiene asíntotas horizontales por ambos infinitos, al intentar calcular asíntotas oblicuas se repetirá el resultado conocido ya de las asíntotas horizontales.

2. (1,5 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Ante un cociente de polinomios con indeterminación $0/0$ los descomponemos por Ruffini, empleando el número a quien tiende x. Numerador y denominador son, respectivamente:

	2	–14	12	0
1		2	–12	0
	2	–12	0	0

	1	–10	27	–18
1		1	–9	18
	1	– 9	18	0

Por tanto:

$$\lim_{x\to1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(2x^2-12x)}{(x-1)(x^2-9x+18)} = \lim_{x\to1} \frac{2x^2-12x}{x^2-9x+18} = \frac{-10}{10} = \boxed{-1}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Un límite con indeterminación $\infty - \infty$ donde tenemos raíces dentro de una resta, requiere multiplicar y dividir por el conjugado de dicha resta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{+\infty+\infty}\right) = \boxed{0}$$

A tener en cuenta que <u>éste límite, cuando x tiende a $-\infty$, no existiría</u>, porque cuando x fuese tomando valores negativos ninguna de las dos raíces cuadradas existiría.

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de la función: $f(x)=\sqrt{x^3-3x^2-x+3}$

Siendo el dominio el conjunto de valores de x para los que existe imagen, lo constituirán las soluciones de la inecuación:

$$x^3-3x^2-x+3\geq 0$$

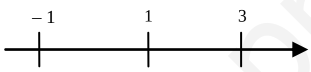
Para resolverla, descomponemos en factores el polinomio, a la vez que calculamos sus raíces. Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -1 & 3 \\
1 & & 1 & -2 & -3 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Así, las raíces son 1, –1, 3. Y factorizando el polinomio, la inecuación a resolver es:

$$1\cdot(x-1)(x+1)(x-3)\geq 0 \iff (x-1)(x+1)(x-3)\geq 0$$

Dividimos R en intervalos mediante las tres raíces obtenidas, resultando:



En cada intervalo resultante, el signo del producto se mantiene constante. Así, basta tomar un punto cualquiera para evaluar dichos signos. Y como queremos que el producto total sea positivo o nulo, según nos ha quedado la inecuación, se tiene:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$x-1$	–	...	–	0	+	...	+
$x+1$	–	0	+	...	+	...	+
$x-3$	–	...	–	...	–	0	+
$(x-1)(x+1)(x-3)$	–	0	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	Si	No	Si	Si

Por tanto:

$$\boxed{D(f)=[-1,1]\cup[3,+\infty)}$$

4. (1 punto). Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y=f(x)=\ln(x+1)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, tiene como pendiente $m = f'(a)$. Como las coordenadas completas del punto de tangencia son $(a, f(a))$, dicha recta es, en forma punto-pendiente:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

- $a = 0 \Rightarrow$ Como $f(a)=f(0) = \ln(0 + 1) = \ln 1 = 0$, el punto de tangencia es (0, 0).
- $f'(x)=\dfrac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad m=f'(a)=f'(0)=\dfrac{1}{0+1}=1$

Por lo que la recta tangente es:

$$y-0=1(x-0) \iff \boxed{y=x}$$

5. (1,25 puntos). Calcular las asíntotas de la función $y=f(x)=\dfrac{3x^2}{x+2}$.

- <u>AH</u>: Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{x+2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 3x = \infty \Rightarrow$ <u>No tiene asíntotas horizontales</u>.
- <u>AV</u>: La única discontinuidad la presenta en $x = -2$ (que anula el denominador). Entonces: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2}{x+2} = \left(\dfrac{12}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ <u>La recta de ecuación $x = -2$ es asíntota vertical</u>.
- <u>AO</u>: Dado que:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x+2}-3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x(x+2)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x^2-6x}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{x} = -6$$

Se tiene que <u>$y = 3x - 6$ es asíntota oblicua</u>.

6. (1,25 puntos). Calcular los valores de "a" y "b" para que la función siguiente sea continua en todo R.

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+2) & si \quad x\in(-2,1] \\ 2a+3bx & si\ x\in(1,2) \\ ax^2+bx+1 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Lo primero que tenemos que hacer es comprobar que, en efecto, es continua en todo R: podría tener alguna discontinuidad que no dependiera ni de a ni de b. Así que estudiamos la continuidad completamente:

- <u>Zona $(-2, 1)$</u>: (Recordar que los puntos que conectan unas zonas con otras deben estudiarse por separado, por lo que no incluimos aquí el 1). f coincide con la función $g(x) = \log_3(x + 2)$. Por ser elemental, g es continua en su dominio, que es $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Todos los puntos de la zona $(-2, 1)$ verifican esta condición (son mayores estrictamente que -2), por los que son puntos donde g (y, por coincidir con g, también f) es continua. Luego <u>f es continua en $(-2, 1)$</u>.
- <u>Zona $(1, 2)$</u>: f coincide con $h(x) = 2a + 3bx$, cuyo dominio es R. Por ser h elemental, es continua, entonces, en su dominio: R. Luego h no tiene ningún punto de discontinuidad. f, en $(1, 2)$ que es donde coindice con h, tampoco. Luego <u>f es continua en $(1, 2)$</u>.
- <u>Zona $(2, +\infty)$</u>: f coincide con $j(x) = ax^2 + bx + 1$, que es continua en su dominio, por ser función elemental. Su dominio es R. Luego no presenta discontinuidades. f, donde coincide con j, tampoco. Por ello, <u>f es continua en $(2, +\infty)$</u>.
- <u>$x = 1$</u>: Veamos las tres condiciones de continuidad en un punto.
  - 1) $\exists f(1) = \log_3(1 + 2) = \log_3(3) = 1$
  - Para estudiar el límite cuando $x \to 1$, hemos de calcular los dos límites laterales, puesto que la fórmula de $f(x)$ es diferente a izquierda y a derecha de 1:

    $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\log_3(x+2) = \log_3(1 + 2) = \log_3(3) = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2a+3bx) = 2a + 3b$$

Por ello, para que los dos laterales coincidan, y lo hagan, a su vez, con $f(1)$, que es la condición para que f sea continua en $x = 1$, se precisa que:

$$\boxed{2a + 3b = 1}$$

- $\underline{x = 2}$: 1) $\exists f(2) = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 1 = 4a + 2b + 1$

  2) Estudiamos los límites laterales:

  $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2a+3bx) = 2a + 6b$$

  $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^2+2bx+1) = 4a + 2b + 1$$

  Para que coincidan y, además, lo hagan con $f(2)$, debe ocurrir:

  $$2a + 6b = 4a + 2b + 1 \iff \boxed{-2a + 4b = 1}$$

Nos resulta un sistema de ecuaciones, que resolvemos por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 2a+3b=1 \\ -2a+4b=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \\ \hline 7b=2 \quad \Rightarrow b = 2/7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2a+3\dfrac{2}{7}=1 \Rightarrow 2a+\dfrac{6}{7}=1 \Rightarrow 2a=1-\dfrac{6}{7} \Rightarrow \\ \qquad\qquad 4 \\ 2a=\dfrac{1}{7} \Rightarrow a=\dfrac{1}{14} \end{array}$$

Por ello, la solución final es: $\boxed{a = 1/14,\ b = 2/7}$.

7. (1,25 puntos). Derivar:

a) $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ b) $y = f(x) = \sqrt{x^2+1} - e^{x^2+2x} + 3^x$

a) $y' = f'(x) = \dfrac{2x(x^2-x-6)-(x^2-1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} =$

$$= \frac{2x^3-2x^2-12x-(2x^3-x^2-2x+1)}{(x^2-x-6)^2} = \frac{2x^3-2x^2-12x-2x^3+x^2+2x-1}{(x^2-x-6)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{-x^2-10x-1}{(x^2-x-6)^2}}$$

b) $y' = f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - (2x+2)e^{x^2+2x} + 3^x \ln 3 = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (2x+2)e^{x^2+2x} + 3^x \ln 3}$

Recordamos que la simplificación, cuando derivamos, debe terminar en una forma que sea, a la vez, fácil para calcular imágenes y para derivar de nuevo. Es algo subjetivo el considerar el final de la simplificación.

☼☺**Comodín: (Este ejercicio puede cambiarse por cualquiera de los anteriores)**.

Calcular los máximos, mínimos e intervalos de monotonía de la función:

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Necesitamos el dominio de la función, que es R por tratarse de una función polinómica, y la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

cuyo dominio también es R, por idéntica razón. Por tanto, ninguna de las dos tiene discontinuidades. Así:

- <u>Discontinuidades de f ó f'</u>: No tiene.

- $\underline{f'(x)=0}$: $3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \dfrac{4 \pm 2}{6} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{1}{3} \\ = 1 \end{array} \right.$

Dividimos R en intervalos mediante los valores obtenidos por cualquiera de las dos vías anteriores:

Damos a f' cualquier valor dentro de cada intervalo, puesto que todos los números del mismo proporcionarán el mismo signo para f':

	(-∞, 1/3)	1/3	(1/3, 1)	1	(1, +∞)
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Máx	↘	Mín	↗

Sustituyendo en *f*, tenemos que:

- Coordenadas del máximo relativo: (1/3, 4/27)
- Coordenadas del mínimo relativo: (1, 0)

No piden la gráfica de la función, pero es la siguiente: