

Control Global de la 2ª Evaluación
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.
1º de Bachillerato

1. (4 puntos). Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ se pide:

- a) Su dominio.
- b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- c) Los intervalos de signos de la función.
- d) Sus asíntotas verticales y horizontales.
- e) ¿Presenta alguna simetría?
- f) Realizar un dibujo aproximado de ella.

2. (2,25 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2 - 3x + 2}}$

4. (1,25 puntos). Dado la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ calcular "a", "b" y "c" sabiendo que:

- Pasa por el punto (2,6).
- Corta al eje OY en un punto de ordenada 4.
- Al dividir $f(x)$ entre $(x+1)$ el resto es 9.

5. (1,25 puntos). Resolver el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 4x < 0 \\ \frac{x+3}{x-2} \geq 0 \end{cases}$

Los alumnos con la primera evaluación suspendida podrán cambiar uno de los dos ejercicios 4 o 5 (a elegir) por el 6.

6. Resolver:

a) $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1}$ b) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 0 \\ x + y + z = 24 \\ 5x + 8y - 11z = 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. (4 puntos). Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ se pide:

a) Su dominio.

El dominio es el conjunto de valores de x para los que puede calcularse la imagen. Para obtenerlo, observamos qué operaciones intervienen en el cálculo de la imagen, y vemos en qué condiciones pueden realizarse. En nuestro caso, potencias y sumas pueden realizarse siempre, con más o menos dificultad. Pero hay una división, y no es posible dividir entre cero, lo que ocurre cuando:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Por tanto, el dominio de esta función es:

$$\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)}$$

Recordemos que $+\infty$ no es lo mismo que ∞ sin signo.

b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- Eje OX: Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2}{x^2 - 4} \Rightarrow$ Para que un cociente resulte cero, el numerador debe anularse, comprobando que los valores obtenidos no anulen, también, al denominador (no podemos dividir entre 0): $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Corta en (0, 0).

- Eje OY: Como cada valor de x , en una función que lo sea, sólo puede tener una imagen, la intersección es el punto anterior: (0, 0).

c) Los intervalos de signos de la función.

Nos piden el signo de $f(x)$ según los valores de x . Dividimos el dominio en intervalos según los puntos de corte de la función con OX y sus discontinuidades, y construimos el siguiente cuadro, porque en cada uno de los intervalos resultantes la función tiene, siempre, el mismo signo; por ello, en cada uno de los mismos, tomamos un valor cualquiera de x , calculamos su imagen y anotamos el signo de la misma: la función toma el mismo signo en todo el intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	+	-	-	+

En el cálculo de estos signos, no hay que llegar al valor exacto de la imagen: el numerador x^2 es siempre positivo o nulo, por lo que el signo del cociente lo va a determinar el denominador.

d) Sus asíntotas verticales y horizontales.

- A.V.: Puede tenerla en los puntos que no están en el dominio. Así que tomamos límite cuando x tiende a cada uno de los dos puntos en los que no hay imagen:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = -2} \text{ es una } \underline{\text{asíntota vertical}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = 2} \text{ es una } \underline{\text{asíntota vertical}}$$

Primer trimestre – 1º Bach CCSS
Ecuaciones, inecuaciones, Gauss, Estudio de Funciones

El resultado de ambos límites es infinito sin signo. Habría que estudiar los límites laterales para cada uno de ellos, para ver con precisión el signo del infinito en cada caso.

- A.H.: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$ es asíntota horizontal

En un cociente de polinomios, con x tendiendo a infinito, podemos, en el límite, sustituir cada polinomio por el término de mayor grado.

- A.O.: Si hemos obtenido asíntota horizontal, si calculásemos la asíntota oblicua nos resultaría la misma ecuación de la mencionada asíntota horizontal. Por tanto, omitimos este cálculo.

e) ¿Presenta alguna simetría?

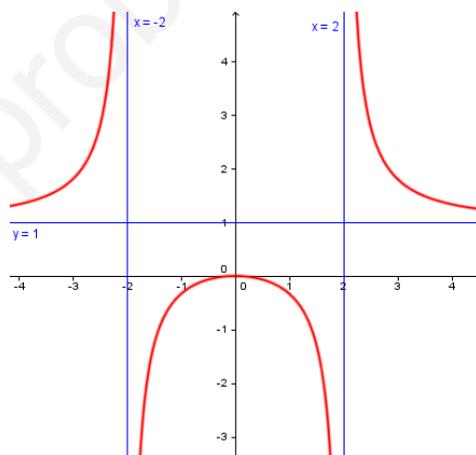
Veamos si la función es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x) \Rightarrow \text{es par.}$$

Por tanto, la gráfica será simétrica respecto del eje OY.

f) Realizar un dibujo aproximado de ella.

Es suficiente la información para obtener un esbozo de la gráfica. Para ello, trazamos las asíntotas y, teniendo en cuenta los signos de $f(x)$ en cada intervalo y que la función debe aproximarse a cada asíntota cuando se acerca a infinito, considerando, además, la simetría respecto al eje OY, la gráfica debe parecerse a la adjunta.



2. (2,25 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

Al sustituir x por 2, obtenemos la indeterminación $0/0$. En el caso de un cociente de polinomios, se eliminará factorizándolos.

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{3} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} = 1 \\ = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

Este límite produce la misma indeterminación que el anterior, y el proceso de resolución es similar. Pero al aparecer una raíz dentro de una resta, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de dicha resta:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} \frac{\sqrt{x + 2} + 2}{\sqrt{x + 2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x + 2})^2 - 2^2}{(x - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

A la izquierda de 2, es decir, cuando $x < 2$, $f(x) = x^2 - 1$. A la derecha, $f(x) =$

$1 - \frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 1 = 4 - 1 = \boxed{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Al tomar distintos valores los límites laterales, el límite completo cuando x tiende a 2 no existe:

$$\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}$$

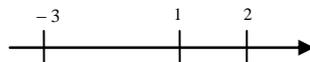
3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-3x+2}}$

El cálculo del dominio tiene en cuenta las operaciones necesarias para encontrar la imagen de cada x . En este ejercicio, hay que tener en cuenta que una raíz cuadrada requiere que el radicando sea mayor o igual que cero, y que el denominador no puede anularse. Todo ello nos conduce a la resolución de la siguiente inecuación, cuyo resultado será el dominio:

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} \geq 0$$

Descomponemos en factores numerador y denominador. El numerador ya es irreducible, mientras que el denominador resulta ser $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, como puede comprobarse fácilmente resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta de igualarlo a cero, o descomponiéndolo por Ruffini.

Las raíces, de numerador y denominador, son: 1, 2, 3. Descomponemos R en intervalos mediante ellas:



	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x+3$	-	0	+	...	+	...	+
$x-1$	-	...	-	0	+	...	+
$x-2$	-	...	-	...	-	0	+
$\frac{x+3}{x^2-3x+2}$	-	0	+	\nexists	-	\nexists	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	No	Si

Por tanto, $\boxed{D(f) = [-3, 1) \cup (2, +\infty)}$

Primer trimestre – 1º Bach CCSS
Ecuaciones, inecuaciones, Gauss, Estudio de Funciones

4. (1,25 puntos). Dado la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ calcular "a", "b" y "c" sabiendo que:

- Pasa por el punto (2,6).
- Corta al eje OY en un punto de ordenada 4.
- Al dividir $f(x)$ entre $(x+1)$ el resto es 9.

Si pasa por (2, 6), se tendrá: $6 = a2^2 + b2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 6$

Si corta a OY en $y = 4$, es que pasa por (0, 4). Luego: $4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4$.

Si el resto de la división de $f(x)$, que tiene forma polinómica, entre $x + 1$ vale 9, por el Teorema del Resto se tendrá que $f(-1) = 9 \Rightarrow a - b + c = 9$

Nos queda, entonces, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4a + 2b + 4 = 6 \\ a - b + 4 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a + 2b = 2 \\ a - b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ a - b = 5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4a + 2b = 2 \\ a - b = 5 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 3a = 6 \\ \Rightarrow a = 2 \end{array}$$

Sustituyendo en la segunda: $2 - b = 5 \Rightarrow 2 - 5 = b \Rightarrow -3 = b$.

Luego: $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

5. (1,25 puntos). Resolver el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 4x < 0 \\ \frac{x+3}{x-2} \geq 0 \end{cases}$

Ambas inecuaciones deben verificarse simultáneamente. Las resolvemos por separado. En cuanto a la primera:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x+1)(x-4)$$

$$\text{Ya que: } x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} = -1 \\ = 4 \end{cases}$$

La inecuación es: $x(x+1)(x-4) < 0$

Las tres raíces encontradas son $-1, 0, 4$.

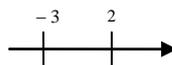
Dividimos el dominio en intervalos:



	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
x	-	...	-	0	+	...	+
$x + 1$	-	0	+	...	+	...	+
$x - 4$	-	...	-	...	-	0	+
$x(x+1)(x-4)$	-	0	+	0	-	0	+
¿Sirven? →	Si	No	No	No	Si	No	No

La solución de esta inecuación es: $(-\infty, -1) \cup (0, 4)$

Para la segunda, las raíces son -3 y 2 :

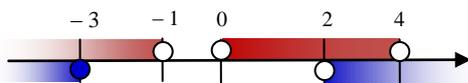


	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x + 3$	-	0	+	...	+
$x - 2$	-	...	-	0	+
$\frac{x+3}{x-2}$	+	0	-	∅	+
¿Sirven? →	Si	Si	No	No	Si

Lo que nos lleva a que la solución de la segunda inecuación es $(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$.

Primer trimestre – 1º Bach CCSS
Ecuaciones, inecuaciones, Gauss, Estudio de Funciones

Llevamos los resultados a un gráfico para decidir dónde se verifican ambas inecuaciones a la vez. En rojo, las soluciones de la primera, y en azul, las de la segunda:



La solución es, entonces: $\boxed{(-\infty, -3] \cup (2, 4)}$.

Los alumnos con la primera evaluación suspendida podrán cambiar uno de los dos ejercicios 4 o 5 (a elegir) por el 6.

6. Resolver:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2}{x+1} &= \frac{x^3-1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \\ \frac{x^2}{x+1} &= \frac{x^3-1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^3-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} &= 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-1) - x^3 + 1 + x + 1}{(x+1)(x-1)} = 0 \end{aligned}$$

Para que el cociente se anule, debe ser 0 el numerador pero no nulo el denominador. Resolvemos la ecuación que resulta de igualar el numerador a cero y, para las soluciones obtenidas, comprobamos que el denominador es distinto de cero (si lo anula-se, desecharíamos tal solución):

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x^3 + x + 2 &= 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La primera de las soluciones obtenidas anula el denominador, por lo que la descartamos. Así que tenemos solución única: $\boxed{x = 2}$.

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Los sistemas no lineales suelen resolverse por sustitución. Despejando en la segunda ecuación: $\boxed{y = 8 - x}$. Y sustituyendo en la primera:

$$\begin{aligned} x^2 - 2(8-x)^2 &= 7 \Rightarrow x^2 - 2(64 - 16x + x^2) - 7 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 128 + 32x - 2x^2 - 7 &= 0 \Rightarrow -x^2 + 32x - 135 = 0 \Rightarrow x^2 - 32x + 135 = 0: \\ x &= \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 540}}{2} = \frac{32 \pm 22}{2} = \begin{cases} 5 \\ 27 \end{cases} \end{aligned}$$

Sustituyendo donde despejamos:

- $x = 5 \Rightarrow y = 8 - 5 = 3$
- $x = 27 \Rightarrow y = 8 - 27 = -19$

Tenemos dos soluciones: $\boxed{(x = 5, y = 3) \quad (x = 27, y = -19)}$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 5y - 6z = 0 \\ x + y + z = 24 \\ 5x + 8y - 11z = 0 \end{cases}$$

Primer trimestre – 1º Bach CCSS
Ecuaciones, inecuaciones, Gauss, Estudio de Funciones

Lo resolvemos por Gauss. Trabajamos con la matriz ampliada. El proceso más corto para triangularizar consiste en elegir una fila y, a partir de ella y mediante combinaciones lineales de filas, conseguir que todas las posiciones de una columna sean 0 salvo la de esa fila (en el primer paso, elegiremos la fila 1 y columna 2). En el paso siguiente, ignorando la fila del paso anterior, elegimos otra fila y otra columna y repetimos el proceso. Habrá que dar tantos pasos como filas haya menos una: en nuestro caso, $3 - 1 = 2$, con lo que estará garantizada la triangularización:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & 8 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 & -48 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & 8 & -11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 & -48 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & -16 & -120 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 & -48 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -8 & -72 \end{pmatrix}$$

El sistema, tras estar triangularizado, tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (ninguna de las filas ha debido ser anulada por estar constituida sólo por 0 o por coincidir con otra), por lo que no es *indeterminado*, y ninguna fila tiene 0 en todas las columnas correspondientes a incógnitas mientras que es no nulo el término independiente, por lo que no es *incompatible*. Por tanto, es un sistema compatible determinado. De la tercera ecuación, tenemos:

$$8z = 72 \Rightarrow z = 9$$

$$\text{Sustituyendo en la primera: } 3y - 72 = -48 \Rightarrow 3y = 24 \Rightarrow y = 8.$$

$$\text{Sustituyendo en la segunda: } x + 8 + 9 = 24 \Rightarrow x = 24 - 17 = 7$$

La solución única es: $\boxed{(7, 8, 9)}$.