TEMA 11:
DISTRIBUCIONES DE VARIABLE CONTINUA. LA NORMAL

Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, de primero de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira.

Página 274

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Manejo de la tabla $N(0, 1)$

1 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ **b)** $P[z \leq 2]$ **c)** $P[z \geq 2]$

d) $P[z \leq -2]$ **e)** $P[z \geq -2]$ **f)** $P[-2 \leq z \leq 2]$

a) $P[z = 2] = 0$

b) $P[z \leq 2] = 0{,}9772$

c) $P[z \geq 2] = 1 - 0{,}9792 = 0{,}0228$

d) $P[z \leq -2] = 1 - 0{,}0228$

e) $P[z \geq -2] = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772$

f) $P[-2 \leq z \leq 2] = 2(P[z \leq 2] - 0{,}5) = 0{,}9544$

2 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula:**

a) $P[z \leq 1{,}83]$ **b)** $P[z \geq 0{,}27]$

c) $P[z \leq -0{,}78]$ **d)** $P[z \geq 2{,}5]$

a) $P[z \leq 1{,}83] = 0{,}9664$

b) $P[z \geq 0{,}27] = 0{,}3935$

c) $P[z \leq -0{,}78] = 0{,}2177$

d) $P[z \geq 2{,}5] = 0{,}0062$

3 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[z = 1{,}6]$ **b)** $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83]$

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5]$ **d)** $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25]$

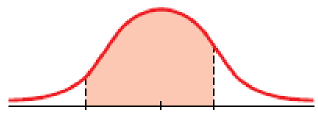
a) $P[z = 1{,}6] = 0$

b) $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83] = P[1{,}83 \le z \le 2{,}71] = P[z \le 2{,}71] - P[z \le 1{,}83] = 0{,}0302$

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5] = P[z \le 2{,}5] - P[z \le 1{,}5] = 0{,}0606$

d) $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25] = P[z \le 1{,}25] - P[z \le -1{,}87] = P[z \le 1{,}25] - P[z \ge 1{,}87] =$

$= P[z \le 1{,}25] - (1 - P[z < 1{,}87]) = 0{,}8637$



4 **Calcula k en cada uno de los siguientes casos:**

a) $P[z < k] = 0{,}8365$ **b)** $P[z > k] = 0{,}8365$ **c)** $P[z < k] = 0{,}1894$

a) $k = 0{,}98$ b) $k = -0{,}98$ c) $k = -0{,}88$

Tipificación

5 **En un examen tipo test, la media fue 28 puntos, y la desviación típica, 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada de los alumnos que obtuvieron:**

a) 38 puntos.

b) 14 puntos.

c) 45 puntos.

d) 10 puntos.

$\mu = 28; \ \sigma = 10$

a) $\dfrac{38 - 28}{10} = 1$ b) $\dfrac{14 - 28}{10} = -1{,}4$

c) $\dfrac{45 - 28}{10} = 1{,}7$ d) $\dfrac{10 - 28}{10} = -1{,}8$

6 **Si en el mismo examen del problema anterior la puntuación tipificada de un alumno fue 0,8, ¿cuántos puntos obtuvo?**

¿Cuántos puntos corresponden a un valor tipificado de –0,2?

$0{,}8 \rightarrow 0{,}8 \cdot 10 + 28 = 36$

$-0{,}2 \rightarrow -0{,}2 \cdot 10 + 28 = 26$

7 **Las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y –0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos.**

¿Cuál es la media y la desviación típica de las puntuaciones del examen?

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{88-\mu}{\sigma}=0{,}8 \\[2ex] \dfrac{64-\mu}{\sigma}=-0{,}4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 88-\mu=0{,}88\sigma \\[2ex] 64-\mu=-0{,}4\sigma \end{array}\right\} 88-0{,}8\sigma=64+0{,}4\sigma \;\rightarrow\; \sigma=20;\;\; \mu=72$$

La media es 72 y la desviación típica 20.

Cálculo de probabilidades en $N(\mu, \sigma)$

8 **En una distribución $N(43, 10)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \geq 43]$ **b)** $P[x \leq 30]$

c) $P[40 \leq x \leq 55]$ **d)** $P[30 \leq x \leq 40]$

a) $P[x \geq 43] = 0{,}5$

b) $P[x \leq 30] = P\left[z \leq \dfrac{30-43}{10}\right] = P[z \leq -1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

c) $P[40 \leq x \leq 55] = P\left[\dfrac{40-43}{10} \leq z \leq \dfrac{55-43}{10}\right] = P[-0{,}3 \leq z \leq 1{,}2] = 0{,}5028$

d) $P[30 \leq x \leq 40] = P[-1{,}3 \leq z \leq -0{,}3] = P[0{,}3 \leq z \leq 1{,}3] = P[z \leq 1{,}3] - P[z \leq 0{,}3] =$
$= 0{,}9032 - 0{,}6179 = 0{,}2853$

9 **En una distribución $N(151, 15)$, calcula:**

a) $P[x \leq 136]$ **b)** $P[120 \leq x \leq 155]$

c) $P[x \geq 185]$ **d)** $P[140 \leq x \leq 160]$

a) $P[x \leq 136] = P\left[z \leq \dfrac{136-151}{15}\right] = P[z \leq -1] = P[z \geq 1] = 1 - P[z < 1] = 0{,}1587$

b) $P[120 \leq x \leq 155] = P[2{,}07 \leq z \leq 0{,}27] = 0{,}5873$

c) $P[x \geq 185] = P[z \geq 2{,}27] = 0{,}0116$

d) $P[140 \leq x \leq 160] = P[-0{,}73 \leq z \leq 0{,}6] = 0{,}5149$

10 **En una distribución $N(22, 5)$, calcula:**

a) $P[x \leq 27]$ **b)** $P[x \geq 27]$ **c)** $P[x \geq 12{,}5]$

d) $P[15 \leq x \leq 20]$ **e)** $P[17 \leq x \leq 30]$

a) $P[x \leq 27] = P[z \leq 1] = 0{,}8413$

b) $P[x \geq 27] = 0{,}1587$

c) $P[x \geq 12{,}5] = P[z \leq 1{,}9] = 0{,}9713$

d) $P[15 \leq x \leq 20] = P[-1{,}4 \leq z \leq -0{,}4] = 0{,}2638$

e) $P[17 \leq x \leq 30] = P[-1 \leq z \leq 1{,}6] = 0{,}7865$

11 **La talla media de los 200 alumnos de un centro escolar es de 165 cm y la desviación típica, 10 cm. Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 180 cm.**

¿Cuántos alumnos puede esperarse que midan más de 180 cm?

x es $N(165, 10)$; $n = 200$ alumnos

$$P[x > 180] = P\left[z > \frac{180 - 165}{10}\right] = P[z > 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

$200 \cdot 0{,}0668 = 13{,}36 \approx 13$ alumnos

Página 275

12 **Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:**

a) Más de 61 kg **b) Entre 63 y 69 kg**

c) Menos de 70 kg **d) Más de 75 kg**

x es $N(65, 8)$

a) $P[x > 61] = P\left[z > \frac{61 - 65}{8}\right] = P[z > -0{,}5] = P[z < 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[63 < x < 69] = P[-0{,}25 < z < 0{,}5] = 0{,}2902$

c) $P[x < 70] = P[z < 0{,}625] = 0{,}7357$

d) $P[x > 75] = P[z > 1{,}25] = 1 - P[z \leq 1{,}25] = 0{,}1056$

13 **Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

x es $N(55, 10)$

a) $P[x \geq 50] = P\left[z \geq \frac{50 - 55}{10}\right] = P[z \geq -0{,}5] = P[z \leq 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $400 \cdot 0{,}6915 = 276{,}6 \approx 277$ alumnos

14 **En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26 °C y una desviación típica de 4 °C. ¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre 22 °C y 28 °C?**

x es $N(26, 4)$

$P[22 < x < 28] = P[-1 < z < 0{,}5] = 0{,}5328$

$0{,}5328 \cdot 31 = 16{,}52 \approx 17$ días

Binomial → Normal

15 **Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?**

x es $B(1\,000;\ 0{,}1667)$ $\rightarrow$ x' es $N(166{,}67;\ 11{,}79)$

$P[x < 100] = P[x' \le 99{,}5] = P[z \le -5{,}70] = 0$

16 **Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras:**

a) Sea mayor que 200.

b) Esté entre 180 y 220.

x es $B(400;\ 0{,}5)$ $\rightarrow$ x' es $N(200,\ 10)$

a) $P[x > 200] = P[x' \ge 200{,}5] = P[z \ge 0{,}05] = 0{,}4801$

b) $P[180 < x < 220] = P[180{,}5 \le x' \le 219{,}5] = P[-1{,}95 \le z \le 1{,}95] = 0{,}9488$

17 **En un bombo de lotería tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9, y cada vez que hacemos la extracción de una bola la devolvemos al bombo.**

a) Si sacamos tres bolas, calcula la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.

a) x es $B(3;\ 0{,}1)$

$P[x = 1] = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$

b) x es $B(100;\ 0{,}1)$ $\rightarrow$ x' es $N(10,\ 3)$

$P[x > 12] = P[x' \ge 12{,}5] = P[z \ge 0{,}83] = 0{,}2033$

PARA RESOLVER

18 **El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro deportivo se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos.**

Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 minutos y 21 minutos.

x es $N(17,\ 3)$

$P[13 < x < 21] = P[-1{,}33 < z < 1{,}33] = 0{,}8164$

19 **En un estadio deportivo se quieren instalar focos para iluminar el campo de juego. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es, aproximadamente, normal con media de 1 500 horas y desviación típica de 200 horas.**

a) Escogiendo uno de los focos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que luzca por lo menos 1 000 horas?

b) Si se decide comprar 1 500 focos, ¿cuántos puede esperarse que luzcan por lo menos 1 000 horas?

x es $N(1\,500,\ 200)$

a) $P[x \geq 1\,000] = P[z \geq -2{,}5] = P[z \leq 2{,}5] = 0{,}9938$

b) $1\,500 \cdot 0{,}9938 = 1\,490{,}7 \approx 1\,491$ focos

20 **Justifica si pueden ser funciones de densidad las siguientes funciones:**

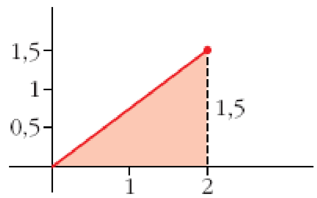
a) $f(x) = 0{,}5 + 0{,}5x,\quad x \in [0,\ 2]$

b) $f(x) = 0{,}5 - x,\quad x \in [0,\ 2]$

c) $f(x) = 1 - 0{,}5x,\quad x \in [0,\ 2]$

Veamos, en cada caso, si el área encerrada bajo la curva es 1:

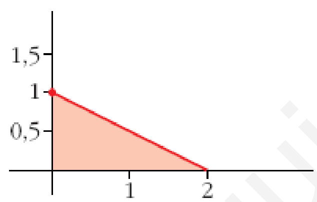
a)



$\text{Área} = \dfrac{1{,}5 \cdot 2}{2} = 1{,}5 \;\rightarrow\;$ No puede ser función de densidad

b) $f(2) = -1{,}5 < 0 \;\rightarrow\;$ No puede ser función de densidad, pues tendría que ser $f(x) \geq 0$

c)



$\left.\begin{array}{l} \text{Área} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1 \\ f(x) > 0 \end{array}\right\} \;\rightarrow\;$ Sí puede ser función de densidad

21 **a) Calcula el valor de k para que la función sea una función de densidad.**

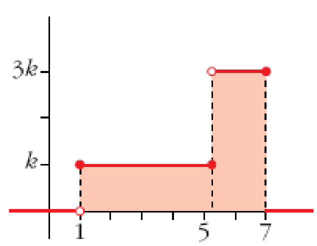
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ k, & 1 \leq x \leq 5 \\ 3k, & 5 < x \leq 7 \\ 0, & x > 7 \end{cases}$$

b) Halla las probabilidades:

$P[2 < x < 5]$ **y** $P[4 < x < 6]$

c) Obtén la expresión de la función de distribución.

a)



El área bajo la curva debe ser 1:

$\text{Área} = 4k + 2 \cdot 3k = 4k + 6k = 10k = 1 \;\rightarrow\; k = \dfrac{1}{10}$

b) $P[2 < x < 5] = (5 - 2) \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0,3.$

$P[4 < x < 6] = P[4 < x < 5] + P[5 < x < 6] = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4.$

c) Si $x \le 1 \rightarrow F(x) = 0$

Si $1 \le x \le 5 \rightarrow F(x) = (x - 1) \cdot \frac{1}{10} = \frac{x-1}{10}$

Si $5 \le x \le 7 \rightarrow F(x) = \frac{4}{10} + (x - 5) \cdot \frac{3}{10} = \frac{4 + 3x - 15}{10} = \frac{3x - 11}{10}$

Si $x \ge 7 \rightarrow F(x) = 1$

Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{10} & \text{si } 1 \le x \le 5 \\ \dfrac{3x-11}{10} & \text{si } 5 \le x \le 7 \\ 1 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$$

Página 276

22 **El número de visitantes que diariamente acuden a una exposición se distribuye según una normal $N(2000, 250)$.**

a) Halla la probabilidad de que un día determinado el número de visitantes no supere los 2 100.

b) Calcula la probabilidad de que un día cualquiera los visitantes sean más de 1 500.

c) En un mes de treinta días, ¿en cuántos días cabe esperar que el número de visitantes supere los 2 210?

$x \sim N(2000, 250) \rightarrow z \sim N(0, 1)$

a) $P[x \le 2\,100] = P[z \le 0,4] = 0,6554$

b) $P[x \ge 1\,500] = P[z \ge -2] = P[z \le 2] = 0,9772$

c) $P[x \ge 2\,210] = P[z \ge 0,84] = 0,2004$

$30 \cdot 0,2004 = 6,012 \rightarrow 6$ días

23 **La duración de un tipo de pilas eléctricas sigue una distribución normal con media de 50 horas y desviación típica de 5 horas. Halla la probabilidad de que, eligiendo una pila al azar, dure entre 40 y 55 horas.**

x es $N(50, 5)$

$P[40 < x < 55] = P[-2 < z < 1] = 0,8185$

24 **La probabilidad de que una jugadora de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es 0,2.**

Si lanzara 1 000 veces y su capacidad de acierto se mantuviera, ¿qué probabilidad hay de que acierte más de 220 veces?

Se trata de una $B(1\,000;\ 0{,}2)$. La probabilidad la calculamos por aproximación normal:

$\mu = 1\,000 \cdot 0{,}2 = 200; \quad \sigma = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 12{,}65$

x es $B(1\,000;\ 0{,}2) \to x'$ es $N(200;\ 12{,}65)$

$P[x > 220] = P[x' \geq 220{,}5] = P[z \geq 1{,}62] = 1 - 0{,}9474 = 0{,}0526$

25 **Una máquina produce tornillos. Sabemos por experiencia que el 4% de ellos son defectuosos. Se empaquetan automáticamente en cajas de 200 tornillos. Halla las siguientes probabilidades relativas al número de tornillos defectuosos en una caja tomada al azar:**

a) $x < 10$ **b)** $x > 10$ **c)** $x = 8$

Se trata de una distribución binomial $B(n, p)$ donde $n = 200$ y $p = 0{,}002$.

Como $np > 3$ y $n(1 - p) > 3$, podemos aproximarla a una distancia normal.

$B(200;\ 0{,}02) \quad \to \quad N(4;\ 1{,}98)$

a) $P[x < 10] = P[x' < 9{,}5] = P\left[z < \dfrac{9{,}5 - 4}{1{,}98}\right] = P[z < 2{,}78] = 0{,}9973$

b) $P[x > 10] = P[x' > 10{,}5] = P\left[z > \dfrac{10{,}5 - 4}{1{,}98}\right] = P[z > 3{,}28] =$

$= 1 - P[z < 3{,}28] = 1 - 0{,}9995 = 0{,}0005$

c) $P[x = 8] = P[7{,}5 < x' < 8{,}5] = P\left[\dfrac{7{,}5 - 4}{1{,}98} < z < \dfrac{8{,}5 - 4}{1{,}98}\right] =$

$= P[1{,}77 < z < 2{,}27] = P[z < 2{,}27] - P[z > 1{,}77] =$

$= P[z < 2{,}27] - (1 - P[z < 1{,}77]) = 0{,}9884 - 1 + 0{,}9616 = 0{,}95$

26 **Un centro de enseñanza va a presentar, este curso, 240 alumnos al examen de selectividad y se sabe que, de ese centro, suele aprobar el 95% de los presentados. ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben:**

a) más de 200,

b) más de 220,

c) más de 230,

d) más de 235 alumnos?

x es $B(240;\ 0{,}95) \to x'$ es $N(228;\ 3{,}38) \to z$ es $N(0,\ 1)$

a) $P[x > 200] = P[x' \geq 200{,}5] = P[z \geq -8{,}13] = 1$

b) $P[x > 220] = P[x' \geq 220{,}5] = P[z \geq -2{,}22] = 0{,}9868$

c) $P[x > 230] = P[x' \geq 230,5] = P[z \geq 0,74] = 0,2296$

d) $P[x > 235] = P[x' \geq 235,5] = P[z \geq 2,22] = 0,0132$

27 **Un examen tiene 38 preguntas del tipo Verdadero-Falso. El examen se aprueba si se contestan correctamente al menos 20 preguntas. Si se responde al azar, halla:**

a) La probabilidad de aprobar el examen.

b) La probabilidad de que el número de respuestas correctas esté entre 25 y 30.

x es $B(38; 0,5) \rightarrow x'$ es $N(19; 3,08)$

a) $P[x \geq 20] = P[x' \geq 19,5] = P[z \geq 0,16] = 0,4364$

b) $P[25 < x < 30] = P[25,5 \leq x' \leq 29,5] = P[2,11 \leq x' \leq 3,41] = 0,0171$

28 **En las últimas elecciones celebradas en un cierto país, la abstención fue del 25% del censo electoral.**

a) Si se seleccionan al azar tres individuos del censo, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno haya votado?

b) Si se toman al azar 100 miembros del censo, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan abstenido al menos 30?

a) x es $B(3; 0,25)$

$P[x = 3] = 0,25^3 = 0,0156$

b) x es $B(100; 0,25) \rightarrow x'$ es $N(25; 4,33)$

$P[x \geq 30] = P[x' \geq 29,5] = P[z \geq 1,04] = 0,1492$

29 **Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta tres respuestas diferentes, solo una de las cuales es correcta. Para aprobar, hace falta responder correctamente a 25 preguntas; para un notable, 35; y para un sobresaliente, 45 respuestas.**

Un estudiante responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe? ¿Y la de que saque un notable? ¿Y un sobresaliente?

x es $B(50; 0,333) \rightarrow x'$ es $N(16,66; 3,33)$

$P[x \geq 25] = P[x' \geq 24,5] = P[z \geq 2,35] = 0,0094 \rightarrow$ probabilidad de aprobar

$P[x \geq 35] = P[x' \geq 34,5] = P[z \geq 5,36] = 0$

La probabilidad de sacar notable o sobresaliente es 0.