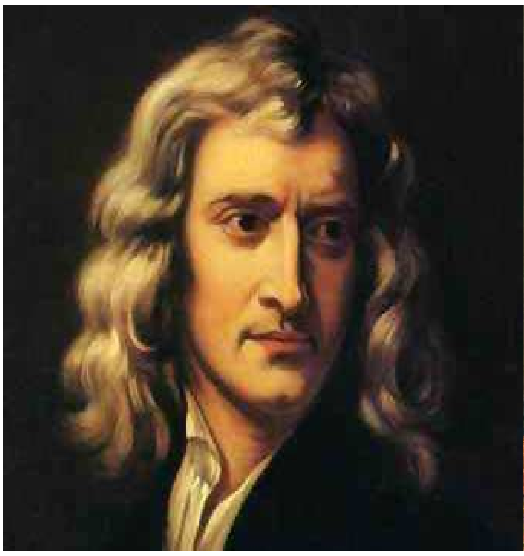
DERIVADAS




Isaac Newton (1642-1727) Gottfried Leibniz (1646-1716)

MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO *(ver pág. 304 del libro de texto)*

En este tema vamos a conocer y emplear un operador matemático muy útil, llamado ***derivada de una función***, que opera sobre una función y da como resultado otra función (habitualmente más simple). Su utilidad radica en que, como veremos más adelante, el signo de la derivada de una función en un punto nos dirá si la función es creciente o decreciente en dicho punto; ello nos permitirá deducir, por tanto, los máximos y mínimos de la función, algo muy importante en infinidad de funciones extraídas de situaciones reales: pensemos en una función que represente los beneficios de una empresa, o el coste de fabricación de un determinado producto, etc.

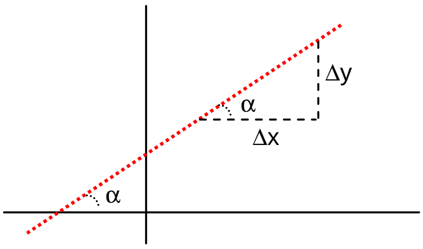
El tema tiene dos grandes partes: en los apartados I, II y III aprenderemos a derivar; en los apartados IV, V y VI veremos algunas aplicaciones de la derivada.

Concepto previo: pendiente de una recta

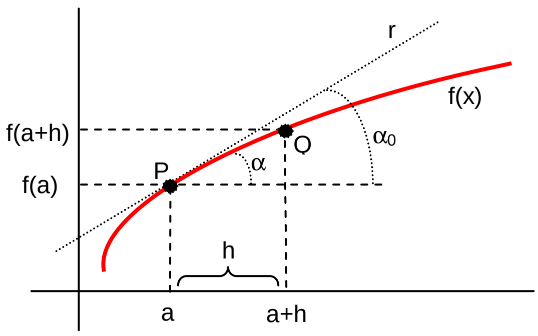
Para entender qué es la derivada necesitamos repasar previamente en qué consistía la pendiente de una recta (tema 4):

La pendiente de una recta, que suele llamarse **m**, mide la inclinación de ésta, y se define (ver figura) como el cociente incremental siguiente:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$



Derivada de una función en un punto f'(a):



Consideremos una función f(x) y un punto P de su gráfica (ver figura), de abscisa x=a. Supongamos que damos a la variable independiente x un pequeño incremento h (en el dibujo lo hemos exagerado, para que se pueda ver la situación…); por lo tanto, nos desplazaremos a un nuevo punto Q de la curva próximo. Consideremos la tangente del ángulo que forma el segmento $\overline{PQ}$ con la horizontal:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2)$$

Si $h\to 0$, el segmento $\overline{PQ}$ tenderá a confundirse con la recta r tangente a la curva f(x) en x=a, es decir, los ángulos α y α_0 tenderán a ser iguales:

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\alpha=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)} \qquad (3)$$

por (2) por definición

Debido a (1), la fórmula anterior –que en el fondo es un cociente incremental– nos da por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en x=a. Esta fórmula se conoce como derivada de la función f(x) en el punto x=a, y se designa como f '(a); por lo tanto:

«La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto», y se calcula mediante el límite dado por (3)[1]

[1] Por lo tanto, veremos en el apdo. IV que la derivada nos permitirá hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado.

Observaciones:

1º) La derivada de una función en un punto puede resultar un número positivo, negativo o cero[2]. Como veremos en el apdo. V, su signo indicará el crecimiento de la función.

2º) Veamos una expresión alternativa para calcular la derivada:

Supongamos que hacemos el cambio de variable a+h=x $\Rightarrow$ si h$\to$0, entonces x$\to$a, con lo cual (3) queda como:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad (4)$$

Esta fórmula es, sin duda, más cómoda que (3), y es la que más usaremos.

3º) **«Una función es derivable en un punto x=a si $\exists$ f '(a)»**

4º) **«Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»**

Ejercicios final tema: 1, 2 y 3

Ejercicios libro: pág. 305: 1 a 4; pág. 320: 6 y 7

II) FUNCIÓN DERIVADA f ´(x) *(ver pág. 306 del libro de texto)*

Supongamos que nos piden la derivada de una función en, por ejemplo, diez puntos distintos. ¿Haremos diez límites? Es evidente que no; para evitar tanto trabajo, vamos a definir la función derivada, que se designa como f'(x), y es la derivada en un punto genérico x (y sustituiríamos a continuación en ella cada uno de los diez puntos); por lo tanto, se obtendrá reemplazando en (3) **a** por **x**:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad (5)$$

Observaciones:

1º) La función derivada, es decir, el límite anterior, da como resultado una función. Habitualmente abreviaremos diciendo simplemente derivada en vez de función derivada.

2º) En Física se utiliza la siguiente notación incremental: $\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, o bien, p. ej. $\boxed{v=\frac{ds}{dt}}$

3º) La notación que nosotros seguiremos será la siguiente:

- Si la función a derivar se llama f(x), entonces su derivada la denotaremos como f'(x)
- " " " " " " " y, " " " " " y'

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

Ejercicios final tema: 4, 5 y 6

Ejercicios libro: pág. 306: 1 a 4; pág. 320: 11

[2] Como veremos también en el apdo. V, los puntos en que la derivada se anule resultarán muy interesantes, ya que serán los máximos o mínimos de la función.

III) DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES *(págs. 307 y 308 libro de texto)*

III.1) Función constante: $\boxed{y = K \rightarrow y' = 0}$

Es decir, **«La derivada de una constante es siempre cero»**

NOTA: Esta derivada, y todas las de este apartado, pueden ser demostradas, pero ello excede los límites de este curso. Todas estas reglas de derivación están recogidas en la tabla de derivadas que se adjunta al final del cuaderno.

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

a) $y = 2$

b) $y = -3$

c) $y = \frac{1}{2}$

d) $y = 0$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $y = \pi$

g) $y=0{,}5$

III.2) Función identidad: $\boxed{y = x \rightarrow y' = 1}$

III.3) Función de proporcionalidad directa: $\boxed{y = K \cdot x \rightarrow y' = k}$

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

a) $y = 2x$

b) $f(x) = -5x$

c) $y = 0{,}01x$

d) $y = \frac{x}{2}$

e) $y = x$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x$

g) $y = -x$

h) $y = -\frac{5x}{3}$

i) $f(t) = 7t$

III.4) Derivada de una potencia: $\boxed{y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}}$ (donde $n \in \mathbb{R}$)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

a) $y=x^2$

b) $f(x)=x^3$

c) $y=x^4$

d) $f(t)=t^5$

e) $y=x^{100}$

Este caso nos permite, dado que el exponente puede ser cualquier número real, abordar otros tipos de derivadas:

Ejercicio 4: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt{x}$

a)

b)

Ejercicio 5: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones, pasándolas previamente a forma de potencia:

a) $y = \sqrt[3]{x}$

b) $y = \sqrt[4]{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

d) $y = x^2\sqrt{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$

Generalización de la fórmula anterior a una función compuesta:

$$\boxed{y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'}$$ (donde $n \in \mathbb{R}$)

(esta fórmula la aplicaremos más adelante en el ejercicio 8)

III.5) $\boxed{y = K \cdot u \rightarrow y' = k \cdot u' \quad \text{donde u es función}}$, es decir, **«Las constantes multiplicativas pueden salir de la derivada»**

Ejercicio 6: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^3$

c) $f(x) = -2x^4$

d) $y = \dfrac{x^2}{2}$

e) $y = -x^5$

f) $y = \dfrac{2}{3}t^6$

g) $y = -x$

h) $y = 3\sqrt[3]{x^4}$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{2}$

j) $y = -\dfrac{3x^4}{2}$

k) $f(t) = -2t^7$

l) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$

m) $y = 2x\sqrt[5]{x}$

III.6) Derivada de la suma (resta): $\boxed{y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v' \quad \text{donde } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son funciones}}$

Es decir: **«La derivada de la suma** (resta) **es la suma** (resta) **de las derivadas»**

Esta regla, combinada con las anteriores, es muy útil para derivar polinomios, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 7: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + x^3$

b) $y = x^4 + 5$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = x - 2$

e) $f(t) = 3t - 5$

f) $y = 3x^2 - x^4$

g) $y = 2x^3 - 3x^4$

h) $y = 2t^4 - t^2 + 3$

i) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

j) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

k) $f(x) = -3x^5 + 4x^3 - x + 2$

l) $y = \frac{x^4}{2} + 5x$

(Sol: $2x^3+5$)

m) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{2}$

(Sol: $x^2-x+1/5$)

n) $f(x) = x^5 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{6} - 3x^2 + \frac{x}{3}$

o) $y = \frac{x^4 + x^2}{2}$

(Sol: $2x^3+x$)

p) $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}001x^2 + 0{,}1x - 0{,}02$

q) $y = \frac{3x^6 - x^3 + 6x - 5}{3}$

(Sol: $6x^5-x^2+2$)

III.7) Derivada del producto: $\boxed{y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + u\,v'}$

Esta regla se puede generalizar a tres o más funciones: $y = u \cdot v \cdot w \rightarrow y' = u'v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'$

NOTA: Para derivar un producto, una alternativa, a veces, es operar previamente hasta transformar en un polinomio, y luego derivar.

Ejercicio 8: Hallar, utilizando la fórmula más adecuada en cada caso, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x+3)(3x-2)$ [de 2 formas, y comparar]

(Sol: $12x+5$)

b) $y = (x-2)(x+3)$

(Sol: 2x+1)

c) $f(x) = (2x+3)(x-5)$

(Sol: 4x−7)

d) $f(x) = (x^2+2)(3x-1)$

(Sol: $9x^2-2x+6$)

e) $y = (x^2-5)(3x-1)+7$

(Sol: $9x^2-2x-15$)

f) $y = (2x-3)^2$ [de 2 formas]

(Sol: 8x−12)

g) $f(x) = (x+2)^3$

(Sol: $3(x+2)^2$)

h) $y = (1{,}2-0{,}001x^2)\,x$

(Sol: $-0{,}003x^2+1{,}2$)

i) $y = (2x^2-3)^2$

(Sol: $16x^3-24x$)

j) $f(t) = 300t(1-t)$

(Sol: 300−600t)

k) $f(x) = (-4x^3-2x)^2$

(Sol: $96x^5+64x^3+8x$)

l) $y =(t^2+t+1)^3$

(Sol: $3(t^2+t+1)^2(2t+1)$)

m) $y = (3x-2)(2x-3)(x+5)$

(Sol: $18x^2+34x-59$)

n) $f(x) = (2x-3)^{100}$

(Sol: $200(2x-3)^{99}$)

III.8) Derivada del cociente:

$$\boxed{y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

Ejercicio 9: Demostrar, utilizando la derivada del producto, la fórmula anterior (Ayuda: poner u/v como $u\cdot v^{-1}$)

Ejercicio 10: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{2x-3}{3x+2}$

$\left(y'=\frac{13}{(3x+2)^2}\right)$

b) $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$

$\left(y'=\frac{-10x}{(x^2-4)^2}\right)$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$

$\left(y'=\frac{-6}{(x-3)^2}\right)$

d) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

$\left(y'=\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)$

e) $y=\frac{x^2+x+1}{x}$

$\left(y'=\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

$(y'=1)$

g) $y=3\,\frac{x^2-1}{x-2}$

$\left(y'=3\,\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\right)$

Ejercicios final tema: 7 a 13

Ejercicios libro: pág. 308: 1, 2, 3, 4, 10, 11; pág. 309: 14, 18; pág. 321: 26b, 27, 28a, 29a, 30a, 31a, 32a, 33a, 39a

- NOTA: Lo que hemos calculado hasta ahora es la función derivada de una función dada, o más comúnmente llamada derivada de una función. Por lo tanto, por tratarse de una función, podemos también evaluar la derivada en un punto dado, obteniendo como resultado un número. Es lo que se conoce como **derivada de una función en un punto**, ya visto en el apartado I. Veamos, a continuación, un ejemplo:

Ejercicio 11: Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado:

a) $f(x)=x^2$ en $x=2$

b) $f(x)=2x-5$ en $x=1$

c) $y=x^3$ en $x=-2$

d) $f(x)=x^2+x+1$ en $x=0$

e) $y=x^2-x$ en $x=-1$

Ejercicios libro: pág. 320: 15, 17, 18, 20, 21

23 EJERCICIOS de DERIVADAS

Derivada de una función en un punto [f'(a)]:

Fórmulas: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (1) $\qquad$ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (2)

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en x=2 mediante (1)

b) $f(x)=2x-5$ en x=1 mediante (2)

c) $f(x)=x^3$ en x=2 mediante (1)

d) $f(x)=\sqrt{x}$ en x=4 mediante (2)

e) $f(x)=1/x$ en x=−1 mediante (1)

f) $f(x)=x^2+x+1$ en x=0 mediante (2)

(Soluc: a) 4; b) 2; c) 12; d) 1/4; e) -1; f) 1)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en x=1. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

Función derivada f'(x):

Fórmula: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (3)

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f'(2), f'(-1) y f'(0):

a) $f(x)=3x-2$ $\quad$ **b)** $f(x)=x^2-5x+6$ $\quad$ **c)** $f(x)=x^3+1$ $\quad$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\quad$ **e)** $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en x=1 mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite) *(Sol: −1)*

Reglas de derivación. Tabla de derivadas:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \Rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in\mathbb{R})}$, hallar la derivada, **simplificada**, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ $\quad$ **b)** $y=x^3$ $\quad$ **c)** $y=3x^4$ $\quad$ **d)** $y=-2x^5$ $\quad$ **e)** $y=\dfrac{3}{2}x^4$

f) $y=\frac{x^2}{4}$ **g)** $y=\sqrt{x}$ **h)** $y=\sqrt{x^3}$ **i)** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **j)** $y=2\sqrt[4]{x^3}$

k) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **l)** $y=x^2\sqrt{x}$ **m)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **n)** $y=-2x^6$ **o)** $y=\frac{x^8}{4}$

p) $y=2\sqrt{x}$ **q)** $y=3\sqrt[5]{x^3}$ **r)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(Soluc: ***a)*** *y'=2x;* ***b)*** *y'=3x²;* ***c)*** *y'=12x³;* ***d)*** *y'=-10x⁴;* ***e)*** *y'=6x³;* ***f)*** *y'=x/2;* ***g)*** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; ***h)*** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; ***i)*** $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

j) $y'=\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$; ***k)*** $y'=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; ***l)*** $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; ***m)*** $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; ***n)*** $y'=-12x^5$; ***o)*** $y'=2x^7$; ***p)*** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

q) $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; ***r)*** $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$*)*

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$ **b)** $y=2x^3-3x^2+5x-3$ **c)** $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$

(Soluc: ***a)*** $y'=2x+1$; ***b)*** $y'=6x^2-6x+5$; ***c)*** $y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$; ***d)*** $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$*)*

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **d)** $y=(x^2-3)^2$ **e)** $y=\frac{2}{x^3}$

f) $y=(x^2+x+1)^3$ **g)** $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$ **h)** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ **i)** $y=3(x^2+1)^{10}$ **j)** $y=2(3x^2-1)^4$

k) $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$

(Sol: ***a)*** $y'=\frac{-2}{x^3}$; ***b)*** $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; ***c)*** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; ***d)*** $y'=4x^3-12x$; ***e)*** $y'=\frac{-6}{x^4}$; ***f)*** $y'=3(2x+1)(x^2+x+1)^2$;

g) $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; ***h)*** $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; ***i)*** $y'=60x(x^2+1)^9$; ***j)*** $y'=48x(3x^2-1)^3$; ***k)*** $y'=\frac{-12x}{(x^2+1)^4}$*)*

10. Ídem:

a) $y=x\sqrt{x^3}$ **b)** $y=(2x-3)(x^2-5)$ **c)** $y=x^2\sqrt[3]{x}$ **d)** $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y=(2x+1)(x^2-3)^2$

f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(Soluc: ***a)*** $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; ***b)*** $y'=6x^2-6x-10$; ***c)*** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; ***d)*** $y'=\frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}$; ***e)*** $y'=10x^4+4x^3-36x^2-12x+18$;

f) $y'=\frac{-3x+1}{2(x+1)^3\sqrt{x}}$*)*

11. Utilizando la fórmula para el cociente de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ **b)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$ **c)** $y=\dfrac{x+2}{x^2-5}$ **d)** $y=\dfrac{3x}{(2x^2+1)^2}$ **e)** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

(Sol: **a)** $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$; **b)** $y'=-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; **c)** $y'=-\dfrac{x^2+4x+5}{(x^2-5)^2}$; **d)** $y'=\dfrac{3-18x^2}{(2x^2+1)^3}$; **e)** $y'=\dfrac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$*)*

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ **b)** $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}$ **c)** $y=\dfrac{x+1}{1-x}$

13. Hallar la fórmula para la derivada de $y=\dfrac{u}{v\cdot w}$ e $y=\dfrac{u\cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en x=1 *(Sol: 6x−y+5=0)*

b) $y=2x^5+4$ en x=−1 *(Sol: 10x−y+12=0)*

c) $f(x)=x^4-1$ en x=0 *(Sol: y=−1)*

d) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2-3}$ en x=2 *(Sol: y=−12x+30)*

15. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación.
(Soluc: y=−1; vértice (3,−1))

16. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. *(Soluc: (7/2,−3/4))*

17. **(S)** Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$ *(Soluc: (1,16) y (−7,176))*

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $y=x^3-3x^2+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h) $y=x^3-3x^2-9x+1$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

j) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

(*Soluc: **a)** $\nearrow(0,\infty)$ $\searrow(-\infty,0)$; **b)** $\nearrow(-1,0)U(1,\infty)$ $\searrow(-\infty,-1)U(0,1)$; **c)** $\nearrow(-\infty,0)U(2,\infty)$ $\searrow(0,2)$; **d)** $\nearrow(-\infty,1)U(3,\infty)$ $\searrow(1,3)$; **e)** $\nearrow \forall x\in\mathbb{R}$; **f)** $\nearrow \forall x\in\mathbb{R}$; **g)** $\searrow(-\infty,0)$ $\nearrow(0,\infty)$; **h)** $\nearrow(-\infty,-1)U(3,\infty)$ $\searrow(-1,3)$; **i)** $\searrow(-\infty,3)$ $\nearrow(3,\infty)$*)

19. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Dom (f) **ii)** Posible Simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento a partir de $f'(x)$, y posibles M y m que se deducen. **v)** Ecuación de las asíntotas, en caso de existir. **vi)** Con la información anterior, representarla gráficamente.

20. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y=\frac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=x^4-2x^2$ **d)** $y=\frac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=x^3-3x^2$

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ **g)** $y=-x^3+12x$ **h)** $f(x)=\frac{9}{x^2-9}$ **i)** $f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$ **j)** $y=\frac{x}{x^2+x+1}$

k) $y=\frac{x}{x^2-x+1}$ **l)** $y=\frac{4x}{(x-1)^2}$ **m)** $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$

21. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones , y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a) $y=\frac{x^2}{x+2}$ **b)** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\frac{1}{x^4+3}$ **d)** $y=\frac{1}{x^3+x}$ **e)** $f(x)=|x|$

(*Soluc: **a)** M(−4,−8) m(0,0); **b)** M(0,1); **c)** M(0,1/3); **d)** no tiene; **e)** m(0,0)*)

22. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

(*Soluc: m$(-1,\sqrt[3]{2})$; $\searrow(-\infty,-1)$ $\nearrow(-1,\infty)$*)

23. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x)=\frac{4x+5}{2x-3}$$

(*Solución: decreciente $\forall x\in$ Dom(f)*)

71 DERIVADAS (con SOLUCIONES)

■ Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. $y=3$ $\quad (y'=0)$

2. $y=x$ $\quad (y'=1)$

3. $y=5x$ $\quad (y'=5)$

4. $y=x^3$ $\quad (y'=3x^2)$

5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ $\quad (y'=4x^3+3x^2+2x+1)$

6. $y= 4x^4-x^3+3x^2-7$ $\quad (y'=16x^3-3x^2+6x)$

7. $y=-\dfrac{x^5}{5}+4x^4-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}-3$

$\left(y'=-x^4+16x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x\right)$

8. $y=3(x^2+x+1)$ $\quad (y'=3(2x+1))$

9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ $\quad (y'=36x^2-14x)$

10. $y=\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ $\quad (y'=3x^2-3x+2)$

11. $y=(x^2+1)\ (2x^3-4)$ $\quad (y'=10x^4+6x^2-8x)$

12. $y=1/x$ $\quad (y'= -1/x^2)$

13. $y=1/x^3$ $\quad$ (y\`$= -3/x^4$)

14. $y=2/x^5$ $\quad (y'= -10/x^6)$

15. $y=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}$ $\quad \left(y'=\dfrac{3x^2-2x-6}{x^4}\right)$

16. $y=\sqrt{x}$ $\quad \left(y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

17. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $\quad \left(y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

18. $y=\sqrt[5]{x^3}$ $\quad \left(y'=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right)$

19. $y=2\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\dfrac{1}{5}$ $\quad \left(y'=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}-6x\right)$

20. $y=(x+1)^5$ $\quad (y'=5(x+1)^4)$

21. $y=(2x^2-3x+1)^3$ $\quad (y'=3\ (2x^2-3x+1)^2\ (4x-3))$

22. $y=(x^2+1)^{100}$ $\quad (y'=200\ x\ (x^2+1)^{99})$

23. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad \left(y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\right)$

24. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad \left(y'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)$

25. $y=3\ \dfrac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\quad \left(y'=3\ \dfrac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2}\right)$

26. $y=\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^4$ $\quad \left(y'=\dfrac{44\,(2x-3)^3}{(x+4)^5}\right)$

27. $y=\sqrt{x^2+1}$ $\quad \left(y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

28. $y=2\sqrt{x^3-x^2+1}\ (2x^2+3)$ $\quad \left(y'=\dfrac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}}\right)$

29. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x}$ $\quad (y'= -3x^3+x^2+x+1/x^2)$

30. $y=2/x$ $\quad (y'= -2/x^2)$

31. $y=3\ (x^2-x+1)\ (x^2+x-1)$ $\quad (y'=3(4x^3-2x+2))$

32. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad \left(y'=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

33. $y=x/2$ $\quad (y'=1/2)$

34. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$ $\quad \left(y'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{9}{x^4}\right)$

35. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ $\quad (y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x)$

36. $y=\sqrt{\dfrac{1-x^3}{x^2+1}}$ $\quad \left(y'=\dfrac{(-x^4-3x^2-2x)\ \sqrt{x^2+1}}{2\ (x^2+1)^2\ \sqrt{1-x^3}}\right)$

37. $y=(x^2+1)\ (3x+2)^3$ $\quad (y'=(3x+2)^2\ (15x^2+4x+9))$

38. $y=(3x^2+2)\ (2x+1)^3$ $\quad (y'=(2x+1)^2\ (30x^2+6x+12))$

39. $y=\dfrac{1}{3x^5-x^3+2}$ $\left(y'=\dfrac{-15x^4+3x^2}{(3x^5-x^3+2)^2}\right)$

40. $y=\sqrt{x^4-2x^2+3}$ $\left(y'=\dfrac{2x^3-2x}{\sqrt{x^4-2x^2+3}}\right)$

41. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\left(y'=\dfrac{-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2+1}}\right)$

42. $y=\sqrt[5]{x^2}+1$ $\left(y'=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\right)$

43. $y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{5}$ $\left(y'=\dfrac{4x^3-4x}{5}\right)$

44. $y=\dfrac{5}{x^4-2x^2+1}$ $\left(y'=\dfrac{20x-20x^3}{\left(x^4-2x^2+1\right)^2}\right)$

45. $y=3\,(x+1)^3\,\sqrt[3]{x+1}$ $\left(y'=10\,\sqrt[3]{(x+1)^7}\right)$

46. $y=x^3\sqrt{x}$ $\left(y'=\dfrac{7x^2\sqrt{x}}{2}\right)$

47. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2x+1}}$ $\left(y'=-\dfrac{2}{3\,\sqrt[3]{(2x+1)^4}}\right)$

48. $y=2x(x^2+1)(2x-1)(x+2)$

49. $y=3\,\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}$ $\left(y'=3\,\dfrac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}\right)$

50. $y=\dfrac{2x+4}{\sqrt{x+3}}$ $\left(y'=\dfrac{x+4}{\sqrt{(x+3)^3}}\right)$

51. $y=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}$

$\left(y'=3x^3-2x^2+x-1/5-1/x^2\right)$

52. $y=\sqrt[4]{(x^4-1)^3}$ $\left(y'=\dfrac{3x^3}{\sqrt[4]{x^4-1}}\right)$

53. $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\left(y'=\dfrac{-6x}{(x+1)^4}\right)$

54. $y=\dfrac{2x^2-3}{3x^2-2}$ $\left(y'=\dfrac{10x}{(3x^2-2)^2}\right)$

55. $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$ $\left(y'=\dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}\right)$

56. $y=2\,(3x^2-2)^3$ $\left(y'=324x^5-432x^3+144x\right)$

57. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ $\left(y'=\dfrac{x}{2\,(x+1)\,\sqrt{x+1}}\right)$

58. $y=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x}$ $\left(y'=\dfrac{-4x^2+4x-9}{x^4}\right)$

59. $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{5}+\sqrt{x}$

60. $y=\sqrt[3]{(x^3-2)^2}$

61. $y=\sqrt{\dfrac{2}{x}}$

62. $y=1+\dfrac{x^3-3}{x^3+2}$

63. $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

64. $y=\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{1}{2x^2}$

65. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

66. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$

67. $y=\left(x^2-3\right)^3\ (2x-1)$

68. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

69. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

70. $y=\sqrt[3]{x^2+1}$

71. $y=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$ $\left(y'=-\dfrac{\sqrt[3]{4x^2}}{3x^2}\right)$

82 DERIVADAS (con SOLUCIONES)

- Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. $y = 5$ $\quad (y'=0)$

2. $y = 3/2$ $\quad (y'=0)$

3. $y = 3x$ $\quad (y'=3)$

4. $y = 2x-3$ $\quad (y'=2)$

5. $y = -x$ $\quad (y'=-1)$

6. $y = \dfrac{x}{2} - 5$ $\quad (y'=1/2)$

7. $y = x^4$ $\quad (y'=4x^3)$

8. $y = 2x^5$ $\quad (y'=10x^4)$

9. $y = \dfrac{x^3}{2}$ $\quad \left(y' = \dfrac{3x^2}{2}\right)$

10. $y = x^3+x^2+x+1$ $\quad (y'=3x^2+2x+1)$

11. $y = 2x^4-3x^2+5x-8$ $\quad (y'=8x^3-6x+5)$

12. $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{7} + 5$ $\quad \left(y' = x^4 - x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{7}\right)$

13. $y = -x^4 + \dfrac{1}{7}$ $\quad (y'=-4x^3)$

14. $y = \dfrac{1}{x}$ $\quad \left(y' = -\dfrac{1}{x^2}\right)$

15. $y = \dfrac{3}{x}$ $\quad \left(y' = -\dfrac{3}{x^2}\right)$

16. $y = \dfrac{1}{3x}$ $\quad \left(y' = -\dfrac{1}{3x^2}\right)$

17. $y = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad \left(y' = -\dfrac{2}{x^3}\right)$

18. $y = \dfrac{3}{x^3}$ $\quad \left(y' = -\dfrac{9}{x^4}\right)$

19. $y = \dfrac{1}{2x^4}$ $\quad \left(y' = -\dfrac{2}{x^5}\right)$

20. $y = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1$ $\quad \left(y' = -\dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

21. $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$ $\quad \left(y' = -\dfrac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}\right)$

22. $y = \dfrac{3}{x^3 - 2x^2 + 5}$ $\quad \left(y' = -3\dfrac{3x^2-4x}{(x^3-2x^2+5)^2}\right)$

23. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5}{3}$ $\quad \left(y' = \dfrac{3x^2-4x}{3}\right)$

24. $y = \sqrt{x}$ $\quad \left(y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

25. $y = \sqrt{6x}$ $\quad \left(y' = \dfrac{3}{\sqrt{6x}}\right)$

26. $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ $\quad \left(y' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)$

27. $y = \sqrt[3]{x}$ $\quad \left(y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

28. $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad \left(y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

29. $y = 2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt{x+1}$ $\quad \left(y' = \dfrac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \dfrac{3}{2\sqrt{x+1}}\right)$

30. $y = (x^2+1)^2$ $\quad (y'=4x^3+4x)$

31. $y = (x^2+1)^{100}$ $\quad (y'=200x(x^2+1)^{99})$

32. $y = (2x^3-3x+5)^3$ $\quad (y'=3(2x^3-3x+5)^2(6x^2-3))$

33. $y = 5(\sqrt{x}+1)^2$ $\quad \left(y' = \dfrac{5(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\right)$

34. $y = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^5$ $\quad \left(y' = 5\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

35. $y = (2x^2-3)(x^2-3x+1)$ $\quad (y'=8x^3-18x^2-2x+9)$

36. $y = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$ $\left(y'=4x^3+2x\right)$

37. $y = (x^2-3)(2x^2-5)^3$

38. $y = (x^2+1)(x-3)(x^2+x)$ $\left(y'=5x^4-8x^3-6x^2-4x-3\right)$

39. $y = x^2\sqrt{x}$ $\left(y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x}\right)$

40. $y = \sqrt[4]{x^3}\,(2x-3)$ $\left(y' = \frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}\right)$

41. $y = \frac{2x-3}{2x+3}$ $\left(y' = \frac{12}{(2x+3)^2}\right)$

42. $y = \frac{x^2-3}{2x+1}$ $\left(y' = \frac{2x^2+2x+6}{(2x+1)^2}\right)$

43. $y = \frac{2x^2-1}{x^2+2}$ $\left(y' = \frac{10x}{(x^2+2)^2}\right)$

44. $y = \frac{3}{x^2-1}$ $\left(y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}\right)$

45. $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$ $\left(y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

46. $y = \sqrt{\frac{1}{x}+1}$ $\left(y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x^2+x}}\right)$

47. $y = 3\,\frac{x^2-4}{x^2+1}$ $\left(y' = \frac{30x}{(x^2+1)^2}\right)$

48. $y = \frac{(3x^2-1)^3}{x^2+1}$ $\left(y' = \frac{108x^7+108x^5-108x^3+20x}{(x^2+1)^2}\right)$

49. $y = \sqrt[4]{x^3}$ $\left(y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)$

50. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\left(y' = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}\right)$

51. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\left(y' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$

52. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ $\left(y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

53. $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $\left(y' = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3}\right)$

54. $y = x^3\sqrt{x}$ $\left(y' = \frac{7\sqrt{x^5}}{2}\right)$

55. $y = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ $\left(y' = -\frac{4x}{(x^2+x+1)^3}\right)$

56. $y = \frac{x}{x^2+1}$ $\left(y' = -\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\right)$

57. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\left(y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

58. $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}$ $\left(y' = \frac{(x^2+2x-1)\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\right)$

59. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ $\left(y' = -\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^2\sqrt{x+1}}\right)$

60. $y = \sqrt{x^5}$ $\left(y' = \frac{5\sqrt{x^3}}{2}\right)$

61. $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$ $\left(y' = -\frac{3x+8}{2x^3\sqrt{x+2}}\right)$

62. $y = \frac{2x+3}{x^2+4x-1}$ $\left(y' = -\frac{2x^2+6x+14}{(x^2+4x-1)^2}\right)$

63. $y = \frac{3x}{x^2-4}$ $\left(y' = -\frac{3x^2+12}{(x^2-4)^2}\right)$

64. $y = \frac{x}{x-1}$ $\left(y' = -\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

65. $y = \sqrt{x^2-5}$ $\left(y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}\right)$

66. $y = x^6-10x^4+8x-3$ $\left(y' = 6x^5-40x^3+8\right)$

67. $y = \frac{x^3-x+1}{x-3}$ $\left(y' = \frac{2x^3-9x^2+2}{(x-3)^2}\right)$

68. $y = \frac{x^2}{x^2-25}$ $\left(y' = -\frac{50x}{(x^2-25)^2}\right)$

69. $y = 5x^4+x^3-x+6$ $\left(y' = 20x^3+3x^2-1\right)$

70. $y=\sqrt[3]{2x^7}$ $\left(y'=\dfrac{7\sqrt[3]{2x^7}}{3x}\right)$

71. $y=\dfrac{5}{x}+\sqrt{x^3}$ $\left(y'=\dfrac{-5}{x^2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

72. $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ $\left(y'=\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\right)$

73. $y=x^4-10x^2+8$ $(y'=4x^3-20x)$

74. $y=\sqrt[6]{x}$ $\left(y'=\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}\right)$

75. $y=\dfrac{5}{x^2}+\sqrt{x}$ $\left(y'=\dfrac{-10}{x^3}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

76. $y=4x+\sqrt[5]{x}$ $\left(y'=4+\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)$

77. $y=5x+\dfrac{2}{x}$ $\left(\left(y'=5-\dfrac{2}{x^2}\right)\right)$

78. $y=5x^9(3x+2)^3$ $(y'=45x^8(3x+2)^2(4x+2))$

79. $y=\dfrac{x\sqrt{x}}{x+2}$ $\left(y'=\dfrac{\sqrt{x}(x+6)}{2(x+2)^2}\right)$

80. $y=\dfrac{2x}{5x+8}$ $\left(y'=\dfrac{16}{(5x+8)^2}\right)$

81. $y=(x^3+8x)^{10}$ $(y'=10(x^3+8x)^9(3x^2+8))$

82. $y=\dfrac{3x-1}{x^5-4x}$ $\left(y'=\dfrac{-12x^5+5x^4-4}{\left(x^5-4x\right)^2}\right)$

83. Deducir la fórmula de la derivada de $y=\sqrt[n]{x}$ e $y=\sqrt[n]{u}$

84. Deducir las derivadas de $y=\dfrac{u}{v\cdot w}$ e $y=\dfrac{u\cdot v}{w}$