Límites de funciones. Tipos de indeterminaciones

Límites y operaciones

Estudiar el límite de una función en un punto es ver "a que tiende" esa función en ese punto "x". Notación $\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = b}$ límite cuando x tiende a ∞ de f(x) es igual a b.

Los valores de x pueden ser finitos o infinitos. Los que toma la función también.
Para calcular un límite debemos sustituir el valor de x por el valor que me diga el límite.
Podemos obtener solución o una indeterminación que hay que resolver.

Operaciones de números (los representamos por k) y $\pm\infty$. Regla de los signos.

Comparar un número (por muy grande o muy pequeño que sea) con el $+\infty$ o el $-\infty$, es como comparar una gota de agua (el número) con el mar (el infinito).
Se supone que el infinito es lo más grande o lo más pequeño que hay pero nunca podemos alcanzarlo. En realidad el infinito se ha establecido para poder poner fin.

Suma y resta $\Rightarrow$ $k \pm \infty = \pm\infty$

a) $8 + \infty = \infty$ b) $-20 - \infty = -\infty$ c) $8 - (+\infty) = 8 - \infty = -\infty$ d) $-\infty + 5 = -\infty$ e) $\infty - 10^6 = \infty$

Producto $\Rightarrow$ $k\,(\neq 0) \cdot \pm\infty = \pm\infty$

a) $5 \cdot \infty = \infty$ b) $-3 \cdot (-\infty) = \infty$ c) $1000 \cdot \infty = \infty$ d) $-\infty \cdot (-8) = \infty$ e) $\infty \cdot (-5) = -\infty$

Cociente $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{k} = \pm\infty \\ \boxed{\dfrac{k}{\infty} = 0} \end{cases}$

a) $\dfrac{\infty}{5} = \infty$ b) $\dfrac{\infty}{-10} = -\infty$ c) $\dfrac{-\infty}{5000} = -\infty$ d) $\dfrac{-\infty}{-0{,}0001} = \infty$

a) $\dfrac{10^6}{\infty} = 0$ b) $\dfrac{-0{,}00005}{-\infty} = 0$ c) $\dfrac{10^6}{-\infty} = 0$

Potencia $\Rightarrow \begin{cases} (\pm\infty)^k \Rightarrow & \text{a) } (\pm\infty)^2 = \infty \quad \text{b) } \infty^3 = \infty \quad \text{c) } (-\infty)^3 = -\infty \\ k^{(\pm\infty)} \Rightarrow & \begin{cases} k > 1 \Rightarrow & \text{a) } 2^{\infty} = \infty \quad \text{b) } \boxed{2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0} \\ 0 < k < 1 & \text{a) } \boxed{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty} = \dfrac{1}{2^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0} \quad \text{b) } \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty} = \infty \end{cases} \end{cases}$

Tipos de indeterminaciones teniendo en cuenta a que tiende x

Límite cuando x tiende a $\pm\infty$. Posibilidades :

a) Obtenemos solución directamente.

b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

c) Indeterminación $\infty - \infty$

d) Indeterminación 1^{∞}

Límite de una función en un punto. Posibilidades :

a) Obtener solución directamente.

b) Obtener la indeterminación $\boxed{\frac{0}{0}}$ .Tipos $\Rightarrow \begin{cases} \text{Con polinomios: factorizamos y simplificamos.} \\ \text{Con raices: utilizamos el conjugado.} \end{cases}$

c) Indeterminación $\boxed{\frac{k}{0}}$ Límites laterales, solución $\pm\infty$. Asíntotas verticales.

d) Funciones definidas "a trozos" . Limites laterales finitos. Lo vemos en continuidad.

Límites cuando $x \to \pm\infty$

a) Límites que nos dan solución directa.

Nos quedamos con el término de mayor grado.

Debemos poner el límite hasta que obtengamos el resultado final.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2+3x+5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} -x^2+3x+5 = \lim\limits_{x\to\infty} -x^2 = \lim\limits_{x\to\infty} -(\infty)^2 = \lim\limits_{x\to\infty} -(\infty) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x-3x^4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x-3x^4 = \lim\limits_{x\to\infty} -3x^4 = \lim\limits_{x\to\infty} -3(\infty)^4 = \lim\limits_{x\to\infty} -3\cdot\infty = -\infty$

b) $\boxed{\textbf{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty}}$ $\quad \dfrac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \begin{cases}\text{Sustituimos x por } \infty \text{ para ver que indeterminación es.}\\ \text{Nos quedamos con los términos de mayor grado.}\\ \text{Al resolver nos pueden aparecer 3 casos.}\end{cases}$

Casos

1. Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, nos da $+\infty$ o $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-5}{x-4} \Rightarrow \begin{cases}1^{\circ} \text{ Debemos comprobar el tipo de indeterminación}\\ 2^{\circ} \text{ Resolvemos}\end{cases}$

1º Sustituimos x por ∞ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-5}{x-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ **INDETERMINACIÓN**

2º Resolvemos $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-5}{x-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 3x = +\infty$

2. Cuando son del mismo grado. La solución es el cociente de los coeficientes del mismo grado.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2-2x+5}{4x^2-4} \Rightarrow \ldots \dfrac{\infty}{\infty}$ Resolvemos $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2-2x+5}{4x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2}{4x^2} = -\dfrac{3}{4}$

3. Cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador. La solución es cero.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^3-4x+3} \Rightarrow \ldots \dfrac{\infty}{\infty}$ Resolvemos $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^3-4x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

c) $\boxed{\textbf{Indeterminación } \infty - \infty}$

Se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la raíz. Utilizamos la igualdad notable **suma por diferencia** para conseguir quitar la raíz. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - x$

1º Sustituimos x por ∞ y nos da la indeterminación $\infty - \infty$.

2º Resolvemos: nos dan $(a - b)$ $\underbrace{\sqrt{x+1}}_{a} - \underbrace{x}_{b}$ el conjugado será $(a + b)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1}-x\right)\left(\sqrt{x+1}+x\right)}{\sqrt{x+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x+1}+x} =$

Límite de una función en un punto

Posibilidades

a) Obtener solución directamente.

b) Obtener la indeterminación $\boxed{\frac{0}{0}}$. Tipos $\Rightarrow \begin{cases} \text{Con polinomios: factorizamos y simplificamos.} \\ \text{Con raices: utilizamos el conjugado.} \end{cases}$

c) Indeterminación $\boxed{\frac{k}{0}}$ Límites laterales, solución $\pm\infty$. **Asíntotas verticales.**

d) Funciones definidas "a trozos". Limites laterales finitos. Lo vemos en continuidad.

a) Obtener solución directamente.

$$\lim_{x\to 2} x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$

Funciones racionales con polinomios: descomponemos en factores y simplificamos.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \frac{0}{0} \ \textbf{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{x+5} = \frac{-2}{7}$$

Funciones racionales con raices: multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = \frac{0}{0} \ \textbf{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x\,(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejercicios de límites resueltos

1. $\lim\limits_{x\to\infty} 5x^3+7x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} 5x^3+7x = \lim\limits_{x\to\infty} 5x^3 = \lim\limits_{x\to\infty} 5\cdot\infty = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{\infty} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-5}{-x^2-4} \;\Rightarrow \dots \dfrac{\infty}{\infty} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-5}{-x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{-x^2} = = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{-1} = -\infty$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} \;\Rightarrow \dots \dfrac{\infty}{\infty} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 \text{ grado } 3}{\sqrt{x} \text{ grado } 1/2} = \infty$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x}{4x^2-4} \;\Rightarrow \dots \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x}{4x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{4x^2} = \dfrac{1}{4}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}} \;\Rightarrow \dots \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x}} = 1$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5}+2x-6}{x^3-4x+2} \;\Rightarrow \dots \dfrac{\infty}{\infty} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5}+2x-6}{x^3-4x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5} \text{ grado } 5/2}{x^3 \text{ grado } 3} = 0$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x \;\Rightarrow\; \dots\; \infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} \;\Rightarrow\; \dots\; \infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \frac{4}{\infty} = 0$$

10. $\lim\limits_{x\to0} [1+3x]^{2/x} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to0} [1+3x]^{2/x} \Rightarrow 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0} [1+3x]^{2/x} = e^{\lim\limits_{x\to0} \frac{2}{x}\left[(1+3x)-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to0} \frac{2\cdot3x}{x}} = e^6$$

11. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{5x}{x-3} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to2} \dfrac{5x}{x-3} = \dfrac{10}{-1} = -10$

12. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} x+1 = 2$

Ejercicios con soluciones

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-x^2-x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^4}{x^6-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}{x^4-2x^3+2x^2-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2+2x-x^2}{x^2-2x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x+2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+5)(5x+2)}{-(x-3)^2}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\dfrac{x^4+1}{x^2-1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+4}-2}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-x}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\right)^{\frac{2x+3}{x-2}}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Soluciones

1) a) 3/4 b) 5/3 c) 4 d) –1/2 e) –1 f) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ g) 4 h) 0 i) –2/3 j) 2

2) a) .+∞ b) 3/2 c) +∞ d) 1 e) e^6 f) e g) . e h) –15 i) –1 j) 1 k) –1 l) 1 m) e^{-1}

Asíntotas verticales

Características y pasos para calcular asíntotas verticales

1. Calculamos el dominio de la función.
2. Tomamos el límite, para los valores de x que no pertenecen al dominio. Si el límite nos dá infinito, en esos valores hay una asíntota vertical. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
3. Para saber a que tiende la función hay que tomar el o los límites laterales.
   La solución sólo puede ser $\pm\infty$
4. Son **rectas paralelas al eje OY**. **Se escriben x = valor de la asíntota vertical.**
5. Funciones que pueden tener asíntotas verticales :

   Funciones racionales : $\boxed{\textbf{Indeterminación } \frac{K}{0}}$

   Funciones logarítmicas y función tangente.
6. El número máximo de asíntotas verticales que puede tener una función es dos.

Ejemplos

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ **figura 1**

Dominio $\Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Límite en x = 1 $\Rightarrow \lim_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0} = \infty$ **Indeterminación** $\dfrac{K}{0}$. Hay una **asíntota vertical en x = 1**.

Tomamos los límites laterales para ver a que tiende la función por su izquierda y por su derecha.
Sustituimos los valores de x por la izquierda (0,99) y por la derecha (1,1),
sólo me interesa el signo que tome no los números, la única solución va a ser $+\infty$ o $-\infty$.

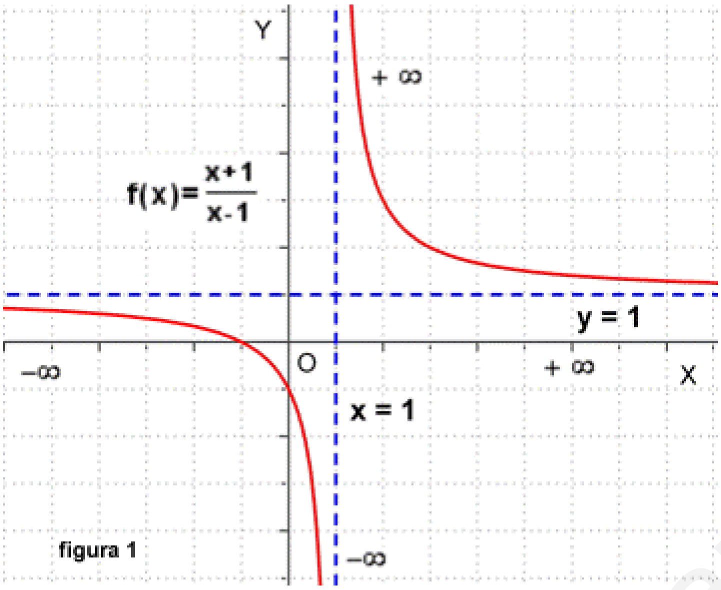
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0,99+1}{0,99-1} = \frac{+}{-} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1,1+1}{1,1-1} = \frac{+}{+} = +\infty$$

La información de los límites laterales la usamos para representar la gráfica. Observa los límites laterales en x = 1 de la figura 1.

2. $f(x) = \log x$

Dominio $\Rightarrow \text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$
El 0 no está incluido, pero el 0,000000001 si.
Tomamos el límite lateral en cero por la derecha para ver el signo.

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = \lim_{x \to 0^+} \log 0,000000001 = -8 = -\infty$$



Visita esta actividad, para ver la asíntota vertical y su límite lateral de una función logarítmica

Asíntotas horizontales

Características y pasos para calcular asíntotas horizontales

Nos indican a que tiende la función cuando la x es muy grande o muy pequeña.

1. Calculamos el límite de la función cuando x tiende a infinito. **Si existe el límite(valor finito)**, el valor del límite es una asíntota horizontal. $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ **se escribe y = b**
2. Son rectas paralelas al eje OX. Se escriben y = valor de la asíntota horizontal.

3. **Las funciones racionales** tienen asíntota horizontal en estos casos :

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ | 1. Cuando el numerador y el denominador son del mismo grado. 2. Cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.

4. **Las funciones exponenciales** tienen una asíntota horizontal en **y = 0.**

Ejemplos de funciones racionales

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ **figura 1**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$$ Hay una asíntota horizontal en **y = 1**

*** Para saber si la función tiende a uno por arriba o por abajo damos valores "grande y pequeño" a x,

$x = 10 \Rightarrow f(10) = \frac{10+1}{10-1} = \frac{11}{9} = 1{,}22$ la función se acerca a uno por arriba de la asíntota para $x \to +\infty$

$x = -10 \Rightarrow f(-10) = 0{,}81$ la función se acerca a uno por abajo para $x \to -\infty$

2. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hay una asíntota horizontal en y = 0 que es la ecuación del eje OX.

En esta actividad tienes una hipérbola donde puedes modificar los distintos valores y observar que pasa con las [asíntotas verticales y horizontales.]

Comprueba la [asíntota horizontal en y = o de las funciones exponenciales] en esta actividad.

Asíntotas oblicuas

Funciones racionales y asíntotas oblicuas

Una función racional tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathbf{f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty \text{ Tiene asíntota oblicua} \\ f(x) = \frac{x^3+1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x-1} = +\infty \text{ No tiene. Tiene una rama parabólica.} \end{array} \right.$$

* * * Las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles. Si hay unas no puede haber otras.

Cálculo de la ecuación de la recta de la asíntota oblicua

$\mathbf{y = mx + n \Rightarrow m \neq 0}$ Debemos calcular $\Rightarrow$

1. pendiente : $m = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right]$
2. ordenada : $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

Ejemplos

1. $\mathbf{f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}$ **figura 2**

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador tiene asíntota oblicua. Esto lo sabemos pero debemos escribir lo siguiente:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty \Rightarrow$ Hay una asíntota oblicua. Calculamos su ecuación:

$$m = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$$

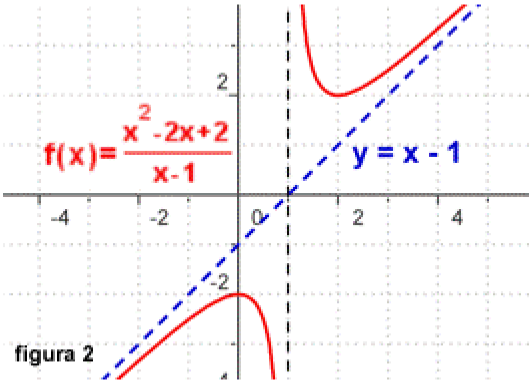
$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

Ecuación: $y = mx + n \Rightarrow \mathbf{y = x - 1}$ (para representarla damos valores)

Otra forma para funciones racionales :

Dividimos P(x) entre Q(x), el cociente es la ecuación de la asíntota. El resto no nos interesa.

2. $\mathbf{f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}} \Rightarrow$ $\begin{array}{l|l} x^2 + 0x + 1 & x - 1 \\ \hline -x^2 + x & x \end{array}$ La ecuación de la asíntota es: $\mathbf{y = x}$



Continuidad de una función en un punto 7.2

Continuidad y tipos discontinuidad de una función en un punto

Una función $f(x)$ es **continua en el punto x = a** si se cumplen las condiciones :

1. Existe f(a). El punto a debe pertenecer al dominio de la función

2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. En funciones definidas "a trozos" $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. En funciones definidas "a trozos" $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Si no se cumple alguna de estas condiciones la función es discontinua en ese punto.
Ver las condición o condiciones que no se cumplen en los distintos **tipos de discontinuidad.**
"Si podemos dibujar la función sin levantar el lápiz del papel es continua. Si no, es discontinua."

Tipos de discontinuidad de una función en un punto

Evitable $\Rightarrow$ **1. $\exists f(a)$ o $\nexists f(a)$ 2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ 3. $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$**

De salto finito $\Rightarrow$ **1. $\exists f(a)$ 2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$**

De salto infinito $\Rightarrow$ **1. $\nexists f(a)$ (Asíntotas verticales)**

Ejemplos

1. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{5x}{x-5}$ en los puntos x = 2 y x = 5. figura 1

Continuidad de la función en x = 2 $\Rightarrow$ Ejemplo de función continua en un punto.

1. $\exists f(a) \Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Calculamos el dominio de } f(x) \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{5\} \\ \text{El valor } x = 2 \text{ forma parte del dominio entonces } \exists \mathbf{f(2)} \Rightarrow f(2) = \dfrac{5 \cdot 2}{2-5} = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$

2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x}{x-5} = -\dfrac{10}{3}$

3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ $\Rightarrow f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \Rightarrow -\dfrac{10}{3} = -\dfrac{10}{3}$

Vemos que se cumplen las 3 condiciones luego la función es continua en x = 2.

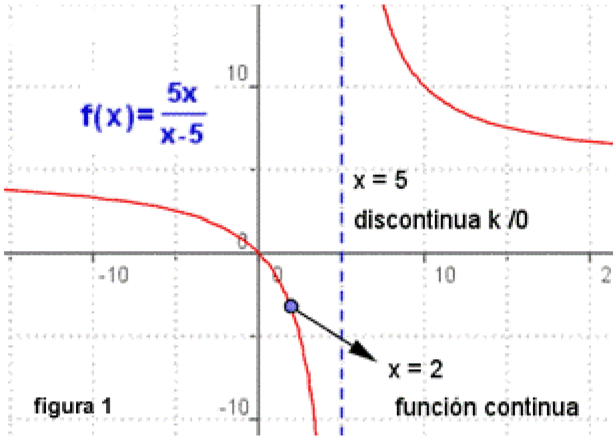
Continuidad de la función en x = 5 $\Rightarrow$ Ejemplo de discontinuidad de salto infinito.

1. $\exists f(a)$ $\Rightarrow$ El valor x = 5 no forma parte del dominio luego **no existe f(5)**. Discontinua.

Si calculamos el límite $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5x}{x-5} = \dfrac{25}{0} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{0}}$ **Indeterminación. Asíntota vertical.**

La función en x = 5 tiene una discontinuidad de salto infinito.

*** Las funciones racionales tendrán una discontinuidad de salto infinito en aquellos valores de x donde no estén definidas.



Discontinuidad evitable

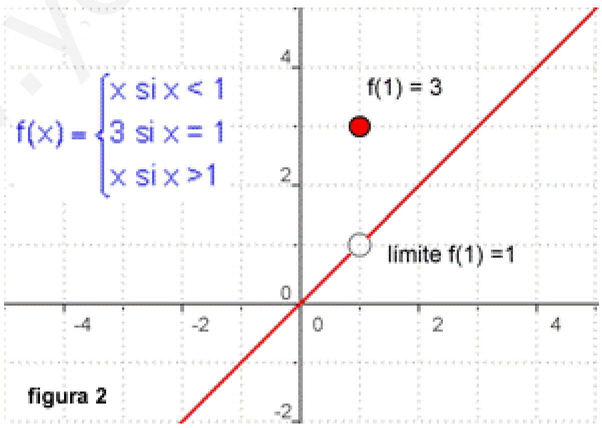
2. Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ **figura 2**

1. $\exists f(a) \Rightarrow f(1)=3$

2. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} x = \lim_{x\to 1^+} x = 1$

3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a) \Rightarrow 1 \neq 3$

El valor de la función no coincide con el valor del límite.
En x = 1 La imagen vale 3 y el límite vale 1. Discontinuidad evitable.



Discontinuidad de salto finito

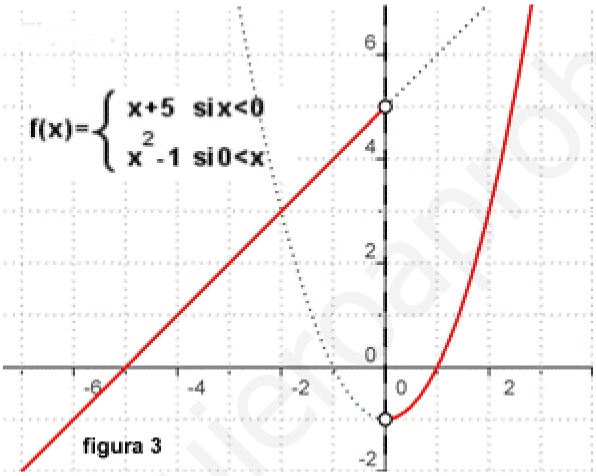
3. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x<0 \\ x^2-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **figura 3**

1. $\nexists f(a) \Rightarrow$ **f(0) no existe**, el valor $x = 0$ no está incluido ni por la izquierda ni por la derecha.
   La función es discontinua en $x = 0$, coincidan o no los límites laterales.

2. Calculamos los límites laterales en el punto frontera. En este caso en $x = 0$.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} x+5 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2-1 = -1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^-} = 5 \neq \lim_{x\to 0^+} = -1$$

No coinciden. Por tanto no existe límite. Discontinuidad de salto finito de 6 unidades.



Ejercicios de continuidad y discontinuidad 7.3

Ejercicios resueltos

1. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ en $x = 1$

1. $\exists f(a)$

Calculamos el dominio de f(x) $\Rightarrow$ Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{1\}$ función discontinua en x = 1 $\nexists f(1)$

2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación. Discontinuidad evitable.

$\lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$. Existe el límite de la función en x = 1 y vale 1.

3. Discontinuidad evitable en x = 1, la función no tiene imagén en x = 1 pero si tiene límite.

2. Calcular el valor de a para que la siguiente función sea continua: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - a x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. f(1)= x + 1 = 2

2. Calculamos los límites laterales $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 3 - a x^2 = 3 - a \end{cases} \Rightarrow 2 = 3 - a \Rightarrow a = 1$

3. Si a = 1 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} = \lim\limits_{x \to 1^+} = f(1) = 2 \Rightarrow$ La función es continua en x = 1

3. Calcular el valor de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad en x = 0

Límites laterales en x = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + 2x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} ax + b = b \end{cases} \Rightarrow b = -1$

Continuidad en x = 1

Límites laterales en x = 1 $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} ax + b = a + b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$

Si a = 3 y b = -1 la función es continua.

4. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \le -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x \le 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y representarla.

Continuidad en x = -2

1. $\exists f(a) \Rightarrow f(-2) = x + 5 = 3 \Rightarrow$ Existe f(-2)

2. Límites laterales $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} x + 5 = 3 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} x^2 - 1 = 3 \end{cases}$ Existe límite en x = -2 y vale 3

3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2^-} = \lim\limits_{x \to -2^+} = f(-2) = 3$

Se cumplen las 3 condiciones y por lo tanto la función es continua en x = -2

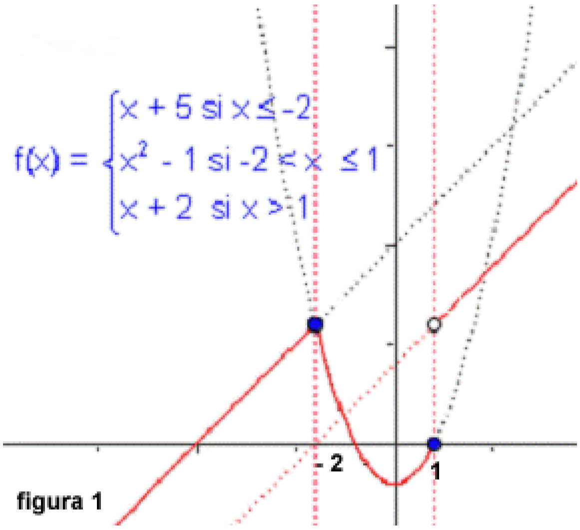


figura 1

Ejercicios con soluciones

1 . Representar la siguiente función y razonar si es continua en los puntos que se indican:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{en } 0,\ 2 \text{ y } 3$$

2. Decir en qué conjunto son continuas cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 5$ b) $g(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+3x-4}$ c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x^3+1} & \text{si } x \neq -1 \\ -4/3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{x^2-x-2}{3x-6} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

4. Estudiar si existe algún valor de k que haga que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^4-3x^3}{7x^5+3x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+k)(x-2)}{x^2-5x+6} & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \leq 0 \\ 2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-3} & x > 3 \\ 3x & x \leq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x^3+1} & si\ x \neq -1 \\ -4/3 & si\ x = -1 \end{cases}$

d) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} & si\ x < 2 \\ 3 & si\ x = 2 \\ \dfrac{x^2-x-2}{3x-6} & si\ x > 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x+1\ ,\ si & x < 3 \\ x^2-5,\ si & 3 < x < 4 \\ 0\ ,\ si & x = 4 \end{cases}$

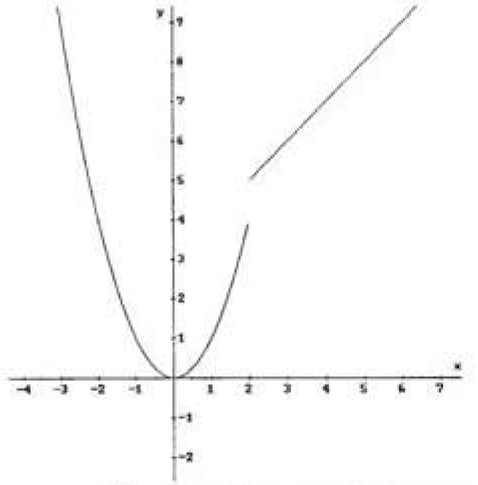
f) $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ x^2-1 & 1 < x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x > 3 \\ 2 & 3 > x \geq 1 \\ x^2+x & 0 < x < 1 \\ x & 0 > x \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x < 0 \\ x^2+2 & 0 < x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$

Soluciones

1)



En 0 y 3 f es continua, en 2 es discontinua con salto finito: los límites laterales son finitos y distintos.

2) a) f es continua en todos los números reales por ser un polinomio.
b)g es continua en todos los números reales menos – 4 y 1.
c)h es continua en (-1/3, +∞)

3) a) f es continua en x = -1, b) g no es continua en x = 2 porque no hay límite de g en dicho punto

4) a) f es continua para cualquier valor de k b) k = – 8.

5)

a) f es continua en $\Re - \{0\}$, $\Re = \{\textit{números reales}\}$, en x = 0 tiene una discontinuidad con salto finito.

b) f es continua en $\Re - \{3\}$, en x = 3 tiene una discontinuidad con salto infinito.

c) f es continua en $\Re$.

d) f es continua en $\Re - \{2\}$, en x = 2 tiene una discontinuidad con salto finito.

e) f es continua en $\Re - \{3, 4\}$, en x = 3 tiene una discontinuidad evitable, en x = 4 tiene una discontinuidad con salto finito.

f) f es continua en $\Re - \{2\}$, en x = 2 tiene una discontinuidad con salto finito.

g) f es continua en $\Re - \{0, 3\}$, en x = 3 tiene una discontinuidad con salto finito y en x = 0 tiene una discontinuidad evitable.

h) f es continua en $\Re - \{0, 2\}$, en x = 2 tiene una discontinuidad inevitable, con los límites laterales iguales y en x = 0 una discontinuidad evitable.