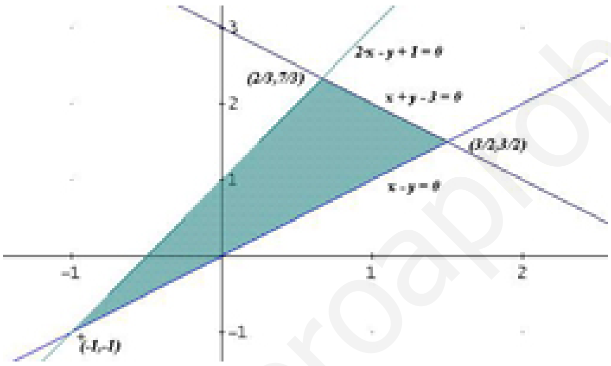
Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Enero 2005

Problema 1 Encontrar dos números reales x, y tales la expresión $f(x, y) = 65x - 80y + 100$ sea máxima. Sabiendo que estos números cumplen las siguientes restricciones:

$$2x - y + 1 > 0$$
$$x + y - 3 < 0$$
$$x - y < 0$$

Solución:



$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = -\frac{130}{3}$$

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{155}{2}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (-1, -1) \Longrightarrow f(-1, -1) = 115$$

Problema 2 Calcular

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{x - 5} \geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{x - 5} = \frac{(x - 3)(x + 7)}{x - 5} \geq 0$$

	$(-\infty, -7)$	$(-7, 3)$	$(3, 5)$	$(5, \infty)$
$x + 7$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+4x-21}{x-5}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución es: $[-7,3]\cup(5,\infty)$

Problema 3 Calcular:

1. $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{2x}{12}\le 1-\dfrac{x}{6}$
2. $\dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{x}{10}\ge 2+\dfrac{x}{2}$

Solución:

1. $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{2x}{12}\le 1-\dfrac{x}{6}\Longrightarrow 4x-4+2x\le 12-2x\Longrightarrow x\le 2\Longrightarrow(-\infty,2]$
2. $\dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{x}{10}\ge 2+\dfrac{x}{2}\Longrightarrow 4x+2-x\ge 20+5x\Longrightarrow x\le -9\Longrightarrow(-\infty,-9]$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow -3}\dfrac{x^3+8x^2+22x+21}{x^3+2x^2-2x+3}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\left(\dfrac{2x^3-x}{2x^3}\right)^{x^2}$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow -3}\frac{x^3+8x^2+22x+21}{x^3+2x^2-2x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3}\frac{(x+3)(x^2+5x+7)}{(x+3)(x^2-x+1)}=\frac{1}{13}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{2x^3-x}{2x^3}\right)^{x^2}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{-1/2}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow \infty}x^2\left(\frac{2x^3-x}{2x^3}-1\right)=-\frac{1}{2}$$

Problema 5 Calcular las asíntotas de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$$

Solución:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2}{x} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2}{x} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x} = \infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x} - x\right) = 0$$

$$y = x$$