Ejercicio 1.

Determina las asíntotas de la función $f(x)$ y analiza la posición de la gráfica con respecto a ellas.

$$f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^2-2x-8}$$

Solución:

Una función cuya expresión analítica es una fracción algebraica, $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *cumple:*

–. *Si* $grado(p(x))\le grado(q(x)) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=k\in\mathbb{R}$ *con lo que la función* $f(x)$ *tiene una asíntota horizontal.*

–. *Si* $grado(p(x))= grado(q(x))+1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=k\in\mathbb{R}$ *con lo que la función* $f(x)$ *tiene una asíntota oblicua.*

–. *Si* $grado(p(x))> grado(q(x))+1 \Rightarrow f(x)$ *no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.*

–. *La función* $f(x)$ *puede tener asíntotas verticales en los puntos* x_0 *tales que* $q(x_0)=0$.

Con esto, vemos que $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-2x-8}$ *tendrá una asíntota horizontal.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-2}{x^2-2x-8}=\left(indeterminación\ \frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+3x-2}{x^2}}{\frac{x^2-2x-8}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{2+0-0}{1-0-0}=2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $y=2$ *es asíntota horizontal para* $f(x)$.

Si damos valores muy grandes a x, p. ej. $x=1000 \Rightarrow f(1000)=\dfrac{200302}{997992}>2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)\ge 2 \Rightarrow$ *cuando* $x\to+\infty$ *la gráfica de* $f(x)$ *está por encima de la asíntota horizontal.*

Si damos valores muy pequeños a x, p. ej. $x=-1000 \Rightarrow f(-1000)=\dfrac{1996998}{1001992}<2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)\le 2 \Rightarrow$ *cuando* $x\to-\infty$ *la gráfica de* $f(x)$ *está por debajo de la asíntota horizontal.*

$x^2-2x-8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2\end{cases} \Rightarrow$ *las rectas* $x=4$ *y* $x=-2$ *pueden ser asíntotas verticales para* $f(x)$. *Veamos si es así.*

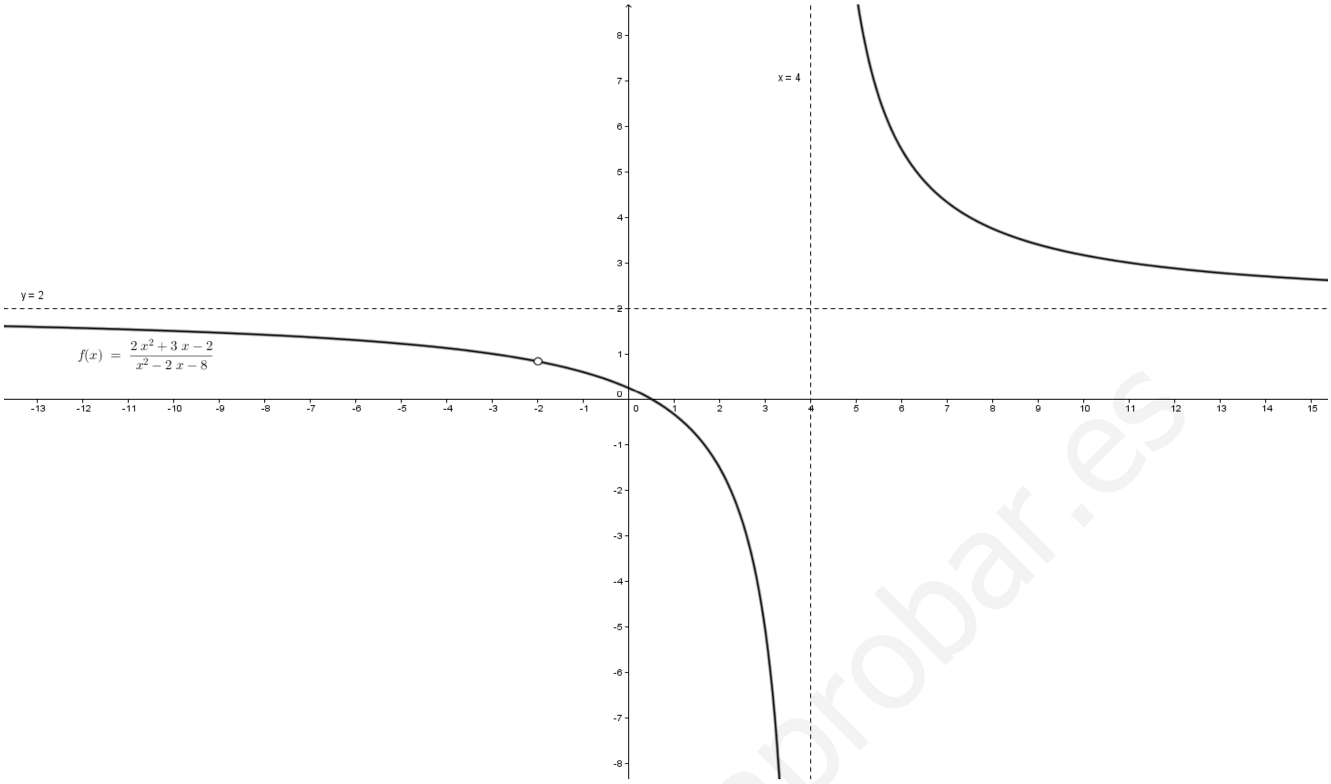
$$\lim_{x\to4}\frac{2x^2+3x-2}{x^2-2x-8}\to\frac{42}{0}\to\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to4^-}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to4^-}\dfrac{2x^2+3x-2}{(x-4)(x+2)}\to\dfrac{42}{0^-\cdot 8}\to-\infty \\ \lim_{x\to4^+}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to4^+}\dfrac{2x^2+3x-2}{(x-4)(x+2)}\to\dfrac{42}{0^+\cdot 8}\to+\infty \end{cases} \Rightarrow x=4 \text{ es asíntota vertical.}$$

Cuando $x\to4^- \Rightarrow f(x)\to-\infty$ *y cuando* $x\to4^+ \Rightarrow f(x)\to+\infty$

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{x^2-2x-8}\to\frac{0}{0}(indeterminación)\Rightarrow \lim_{x\to-2}\frac{(2x-1)(x+2)}{(x-4)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{(2x-1)}{(x-4)}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}\Rightarrow x=-2 \text{ no es asíntota vertical}$$

porque aunque $f(-2)$ *no existe,* $\lim_{x\to-2} f(x)=\dfrac{5}{6}$ *y esto quiere decir que cuanto más nos acercamos con valores x a* (-2) *más se acercan sus imágenes al valor* $\dfrac{5}{6}$.

Entonces la función $f(x)$ *tiene una asíntota vertical,* $x=4$, *y una asíntota horizontal,* $y=2$. *Su gráfica es la siguiente:*



Ejercicio 2.

Calcula los siguientes límites de funciones:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right) \qquad b)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{3-x} \qquad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{x^2-2x}$

Solución:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)\to\left(\dfrac{1}{0}-\dfrac{2}{0}\right)$ *que es una indeterminación del tipo* $\infty-\infty$. *Para tratar de quitarla restamos las fracciones.*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\left(indet.\ \frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$b)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{3-x}\to\dfrac{3}{0}\to\infty$ *Necesitamos calcular los límites laterales en* $x\to 3$ *para ver la tendencia de la función.*

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x}{3-x}\to\frac{3}{0^+}\to+\infty\ ;\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x}{3-x}\to\frac{3}{0^-}\to-\infty\ \Rightarrow\ \begin{cases} cuando\ x\to 3^-,\ f(x)\to+\infty \\ cuando\ x\to 3^+,\ f(x)\to-\infty \end{cases}$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{x^2-2x}=\left(indet.\ \frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x+3}{x^2}}{\frac{x^2-2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{0+0}{1-0}=0$$

Ejercicio 3.

Encuentra el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+2x-1}{3x+3} & si \;\; x\neq -1 \\ k & si \;\; x=-1 \end{cases}$$

Solución:

La función $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{3x+3}$ *es cociente de funciones continuas en todo* $\mathbb{R} \Rightarrow$ *es una función continua en todos los puntos, salvo en los que anulan el denominador.*

Como $3x+3=0 \;\Rightarrow\; x=-1$, *tenemos que* $y=\dfrac{3x^2+2x-1}{3x+3}$ *es continua en* $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

Ahora $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+2x-1}{3x+3} & si \;\; x\neq -1 \\ k & si \;\; x=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ *es continua en* $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ *y para que sea continua en todo* $\mathbb{R}$, *debe ser continua en* $x=-1$. $f(x)$ *será continua en* $x=-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

$$\begin{cases} f(-1)=k \\ \lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{3x+3}=\left(indet.\ \dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(3x-1)}{3(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x-1}{3}=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ será continua en todo } \mathbb{R} \Leftrightarrow k=-\frac{4}{3}$$

Ejercicio 4.

La función $f(x)=\dfrac{3x^2-8}{x+4}$ tiene una asíntota oblicua, calcula su ecuación y represéntala.

Solución:

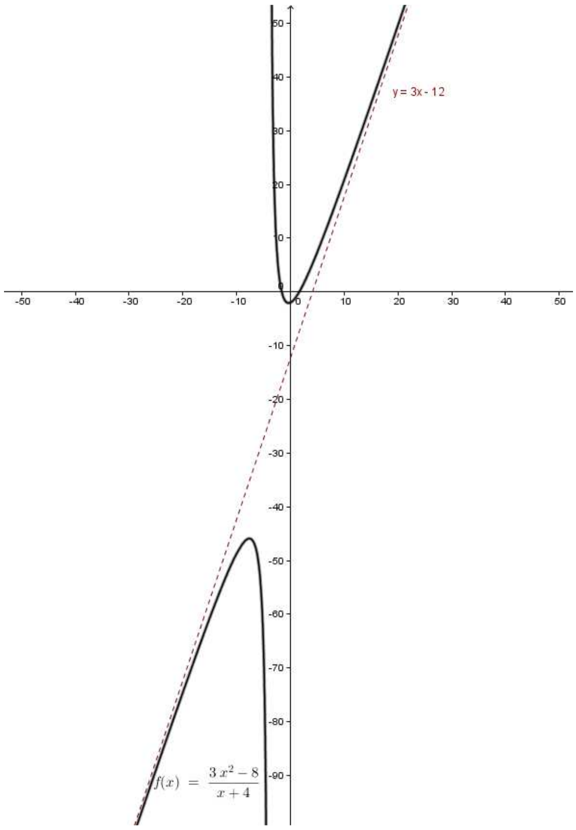
Una asíntota oblicua es una recta $y=mx+b$, *con* $m\neq 0$, *a la que se acerca la función, tanto como queramos, cuando* $x\to\infty$.

$$Luego \;\; \lim_{x\to\infty}(mx+b)=\lim_{x\to\infty} f(x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{mx+b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty}\left(m+\dfrac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \;\Rightarrow\; m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ \lim\limits_{x\to\infty}(mx)+\lim\limits_{x\to\infty}(b)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty}(mx)+b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \;\Rightarrow\; b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) \end{cases}$$

$$Entonces \;\; m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-8}{x+4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-8}{x^2+4x}=\left(indet.\ \frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-8}{x^2}}{\frac{x^2+4x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{3-0}{1+0}=3$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-8}{x+4}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-8}{x+4}-\frac{3x(x+4)}{x+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-12x-8}{x+4}=\left(indet.\ \frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-12-\frac{8}{x}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{-12-0}{1+0}=-12$$

Por tanto, la asíntota oblicua de $f(x)$ *es la recta* $y=3x-12$



La función $f(x)=\dfrac{3x^2-8}{x+4}$ *tendría este aspecto.*
Observamos que también tiene una asíntota vertical en $x=-4$.

Ejercicio 5.

Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica las discontinuidades.

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+2} & si\ \ x\le -2 \\ \dfrac{x^2+2x}{x} & si\ \ x>-2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & si\ \ x<0 \\ \dfrac{x+6}{2-x} & si\ \ x\ge 0 \end{cases}$$

Solución:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+2} & si\ \ x\le -2 \\ \dfrac{x^2+2x}{x} & si\ \ x>-2 \end{cases}$$

La función $y=e^{x+2}$ *es siempre continua, por tanto* $f(x)$ *es continua en* $(-\infty\,,-2)$

La función $y=\dfrac{x^2+2x}{x}$ *es cociente de funciones continuas* $\Rightarrow$ *es continua en todos los puntos, salvo en* $x=0$. *Entonces* $f(x)$ *es continua en* $(-2\,,0)\cup(0\,,+\infty)$. *Analicemos la función* $f(x)$ *en los puntos* $x=-2$ *y* $x=0$.

$$En\ x=-2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2)=e^{-2+2}=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} e^{x+2}=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+2x}{x}=\dfrac{0}{-2}=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)\ne \lim_{x\to -2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x)\ no\ existe$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de tipo finito en $x=-2$ (*los límites laterales son distintos pero ninguno infinito*)

$$En\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)\ \text{no existe} \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\left(indet.\ \dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ *pero* $f(0)$ *no existe* $\Rightarrow$ *$f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=0$*

$$g(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & si\ \ x<0 \\ \dfrac{x+6}{2-x} & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

La función $y=x^2-x+3$ *es siempre continua, por tanto* $f(x)$ *es continua en* $(-\infty\ ,0)$

La función $y=\dfrac{x+6}{2-x}$ *es cociente de funciones continuas* $\Rightarrow$ *es continua en todos los puntos, salvo en* $x=2$. *Entonces* $f(x)$ *es continua en* $(0\ ,2)\cup(2\ ,+\infty)$. *Analicemos la función* $f(x)$ *en los puntos* $x=0$ *y* $x=2$.

$$En\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=\dfrac{6}{2}=3 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-x+3\right)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+6}{2-x}=\dfrac{6}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=3 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Rightarrow$ *$f(x)$ es continua en $x=0$.*

$$En\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} f(2)\ \text{no existe} \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)\to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+6}{2-x}\to\dfrac{8}{0^+}\to+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+6}{2-x}\to\dfrac{8}{0^-}\to-\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)\ \text{no existe} \end{cases}$$

Como los límites laterales tienden a infinito $\Rightarrow$ *$f(x)$ presenta una discontinuidad de tipo infinito en $x=2$*