

Ejercicio 1.

Determina las asíntotas de la función $f(x)$ y analiza la posición de la gráfica con respecto a ellas.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x - 8}$$

Solución:

Una función cuya expresión analítica es una fracción algebraica, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ cumple:

- Si $\text{grado}(p(x)) \leq \text{grado}(q(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$ con lo que la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal.
- Si $\text{grado}(p(x)) = \text{grado}(q(x)) + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ con lo que la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua.
- Si $\text{grado}(p(x)) > \text{grado}(q(x)) + 1 \Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.
- La función $f(x)$ puede tener asíntotas verticales en los puntos x_0 tales que $q(x_0) = 0$.

Con esto, vemos que $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x - 8}$ tendrá una asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x - 8} = \left(\text{indeterminación } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2}}{\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 - 0} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 2$ es asíntota horizontal para $f(x)$.

Si damos valores muy grandes a x , p. ej. $x = 1000 \Rightarrow f(1000) = \frac{200302}{997992} > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 2 \Rightarrow$ cuando $x \rightarrow +\infty$ la gráfica de $f(x)$ está por encima de la asíntota horizontal.

Si damos valores muy pequeños a x , p. ej. $x = -1000 \Rightarrow f(-1000) = \frac{1996998}{1001992} < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq 2 \Rightarrow$ cuando $x \rightarrow -\infty$ la gráfica de $f(x)$ está por debajo de la asíntota horizontal.

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow$ las rectas $x = 4$ y $x = -2$ pueden ser asíntotas verticales para $f(x)$. Veamos si es así.

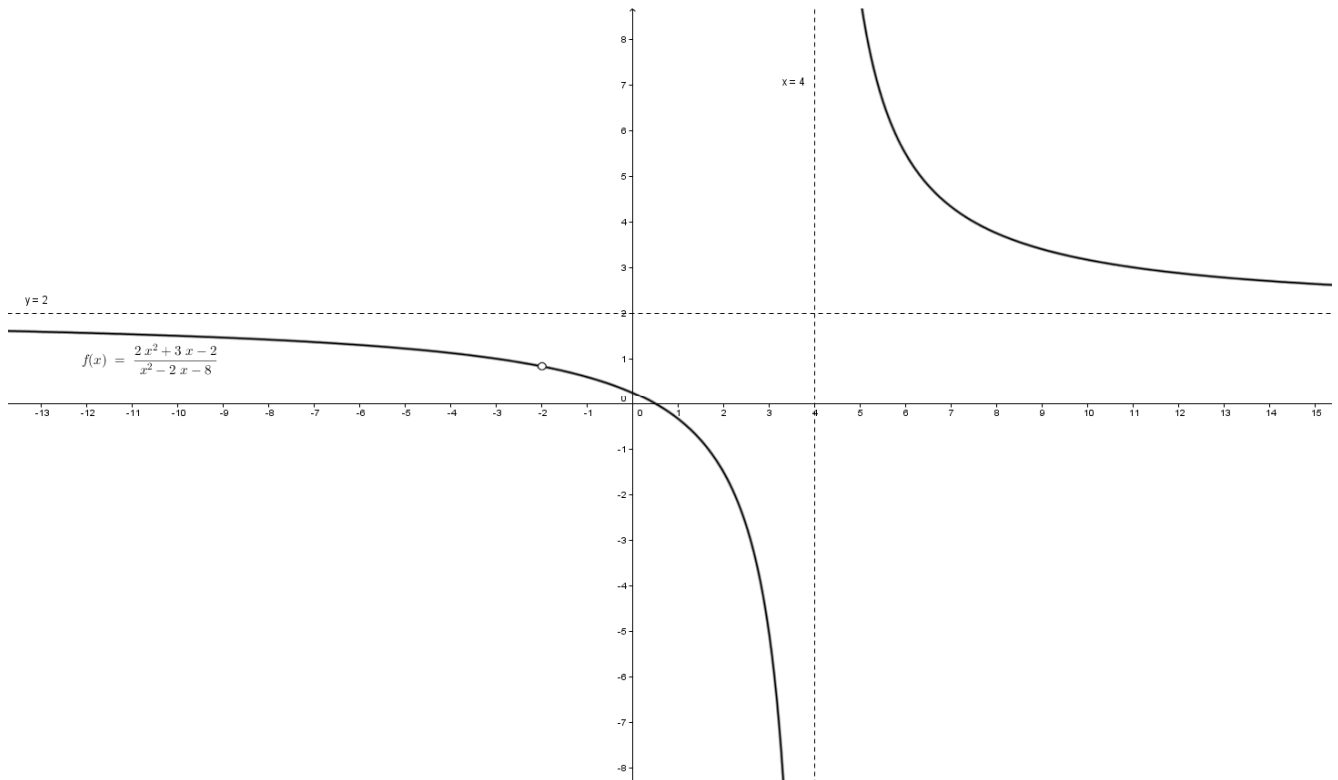
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x - 8} \rightarrow \frac{42}{0} \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2 + 3x - 2}{(x-4)(x+2)} \rightarrow \frac{42}{0^- \cdot 8} \rightarrow -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2 + 3x - 2}{(x-4)(x+2)} \rightarrow \frac{42}{0^+ \cdot 8} \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ es asíntota vertical.}$$

Cuando $x \rightarrow 4^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow 4^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x - 8} \rightarrow \frac{0}{0} (\text{indeterminación}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-4)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-4} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6} \Rightarrow x = -2 \text{ no es asíntota vertical}$$

porque aunque $f(-2)$ no existe, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{5}{6}$ y esto quiere decir que cuanto más nos acercamos con valores x a (-2) más se acercan sus imágenes al valor $\frac{5}{6}$.

Entonces la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical, $x = 4$, y una asíntota horizontal, $y = 2$. Su gráfica es la siguiente:



Ejercicio 2.

Calcula los siguientes límites de funciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{3-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x^2-2x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{0} - \frac{2}{0} \right)$ que es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para tratar de quitarla restamos las fracciones.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left(\text{indet. } \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{3-x} \rightarrow \frac{3}{0} \rightarrow \infty$ Necesitamos calcular los límites laterales en $x \rightarrow 3$ para ver la tendencia de la función.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3-x} \rightarrow \frac{3}{0^+} \rightarrow +\infty ; \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{3-x} \rightarrow \frac{3}{0^-} \rightarrow -\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{cuando } x \rightarrow 3^-, f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{cuando } x \rightarrow 3^+, f(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x^2-2x} = \left(\text{indet. } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x+3}{x^2}}{\frac{x^2-2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

Ejercicio 3.

Encuentra el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x + 3} & \text{si } x \neq -1 \\ k & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Solución:

La función $y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x + 3}$ es cociente de funciones continuas en todo $\mathbb{R} \Rightarrow$ es una función continua en todos los puntos, salvo en los que anulan el denominador.

Como $3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$, tenemos que $y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x + 3}$ es continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Ahora $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x + 3} & \text{si } x \neq -1 \\ k & \text{si } x = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ y para que sea continua en todo \mathbb{R} ,

debe ser continua en $x = -1$. $f(x)$ será continua en $x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

$$\begin{cases} f(-1) = k \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x + 3} = \left(\text{indet. } \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{3(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-1}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) \text{ será continua en todo } \mathbb{R} \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 4.

La función $f(x) = \frac{3x^2 - 8}{x + 4}$ tiene una asíntota oblicua, calcula su ecuación y represéntala.

Solución:

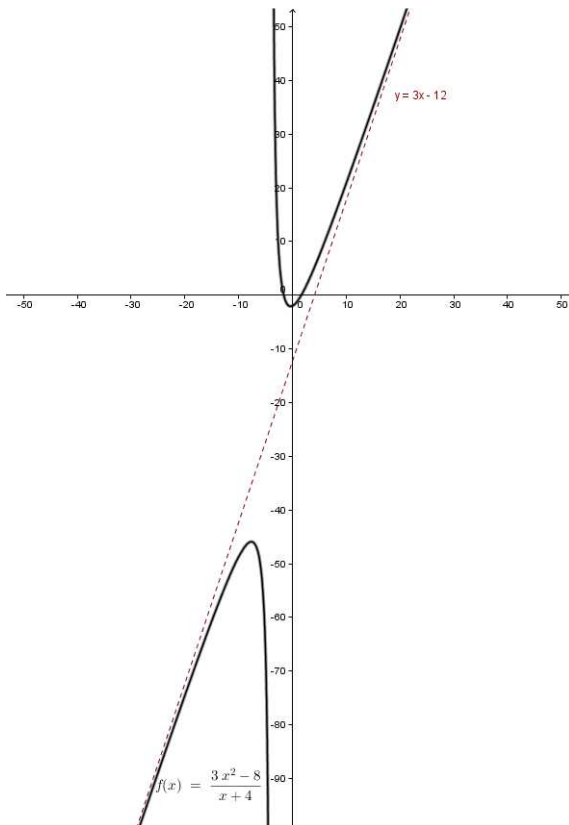
Una asíntota oblicua es una recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$, a la que se acerca la función, tanto como queramos, cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow \infty} (mx + b) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{mx + b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(m + \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (mx) + \lim_{x \rightarrow \infty} (b) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (mx) + b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \end{cases}$$

$$\text{Entonces } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 8}{x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 8}{x^2 + 4x} = \left(\text{indet. } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 8}{x^2}}{\frac{x^2 + 4x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{8}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 8}{x + 4} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 8}{x + 4} - \frac{3x(x + 4)}{x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12x - 8}{x + 4} = \left(\text{indet. } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12 - \frac{8}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{-12 - 0}{1 + 0} = -12$$

Por tanto, la asíntota oblicua de $f(x)$ es la recta $y = 3x - 12$



La función $f(x) = \frac{3x^2 - 8}{x + 4}$ tendría este aspecto.

Observamos que también tiene una asíntota vertical en $x = -4$.

Ejercicio 5.

Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica las discontinuidades.

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+2} & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x^2 + 2x}{x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x + 6}{2 - x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+2} & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x^2 + 2x}{x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función $y = e^{x+2}$ es siempre continua, por tanto $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2)$

La función $y = \frac{x^2 + 2x}{x}$ es cociente de funciones continuas \Rightarrow es continua en todos los puntos, salvo en $x = 0$. Entonces $f(x)$ es continua en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$. Analicemos la función $f(x)$ en los puntos $x = -2$ y $x = 0$.

$$\text{En } x = -2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = e^{-2+2} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} e^{x+2} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{0}{-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ no existe}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de tipo finito en $x = -2$ (los límites laterales son distintos pero ninguno infinito)

$$\text{En } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = \left(\text{indet. } \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ pero $f(0)$ no existe $\Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+6}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función $y = x^2 - x + 3$ es siempre continua, por tanto $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$

La función $y = \frac{x+6}{2-x}$ es cociente de funciones continuas \Rightarrow es continua en todos los puntos, salvo en $x = 2$. Entonces $f(x)$ es continua en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Analicemos la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

$$\text{En } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{6}{2} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - x + 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+6}{2-x} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$\text{En } x = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(2) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+6}{2-x} \rightarrow \frac{8}{0^+} \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+6}{2-x} \rightarrow \frac{8}{0^-} \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe} \end{cases}$$

Como los límites laterales tienden a infinito $\Rightarrow f(x)$ presenta una discontinuidad de tipo infinito en $x = 2$