

Ejercicio 1.

Resuelve, por el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = -6 \end{cases}$$

Solución:

Escribimos el sistema en forma de matriz y aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -9 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -9 \\ 7 & 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

Entonces, el sistema queda:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \rightarrow 4 - 5 + z = 1 \rightarrow z = 2 \\ -x + y = -9 \rightarrow -4 + y = -9 \rightarrow y = -5 \\ 7x = 28 \rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^3 + 4x^2 - 21x < 0$

b) $\frac{x^2}{2-x} \geq 1$

Solución:

a) $x^3 + 4x^2 - 21x < 0$

Descomponemos en factores el polinomio: $x^3 + 4x^2 - 21x = x(x^2 + 4x - 21) = x(x+7)(x-3)$ ya que la ecuación $x^2 + 4x - 21 = 0$ tiene por soluciones $\begin{cases} x = -7 \\ x = 3 \end{cases}$ Ahora, veamos cuándo $x(x+7)(x-3) < 0$

	$(-\infty, -7)$	-7	$(-7, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
x	-	-	-	0	+	+	+
$(x+7)$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	-	-	0	+
$x(x+7)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+

Solución: $(-\infty, -7) \cup (0, 3)$

$$b) \frac{x^2}{2-x} \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2-x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2-x} - \frac{2-x}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{2-x} \geq 0$$

Factorizamos el numerador y nos queda $\frac{(x-1)(x+2)}{2-x} \geq 0$. Ahora, analicemos el signo de la fracción:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$(x+2)$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(2-x)$	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{(x+2)(x-1)}{2-x}$	+	0	-	0	+	\nexists	-

Solución: $(-\infty, -2] \cup [1, 2)$

Ejercicio 3.

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

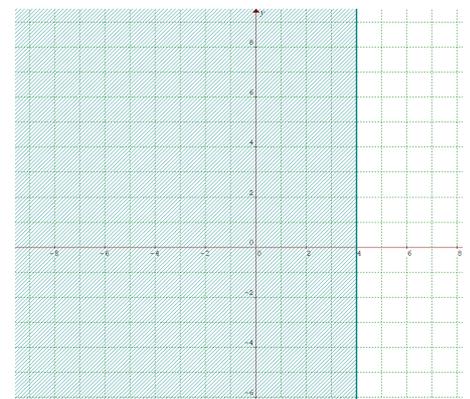
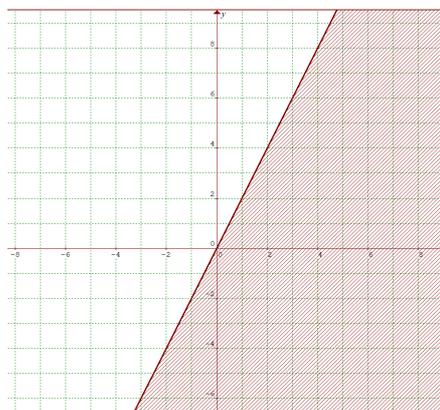
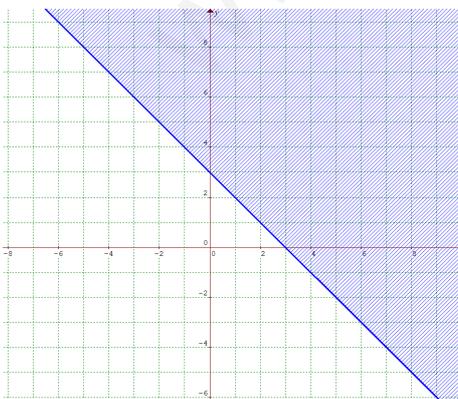
Solución:

Los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, los resolvemos gráficamente. Para ello, representamos las rectas y vemos la región del plano que cumple cada desigualdad. Nos quedaremos con los puntos del plano que cumplan todas las desigualdades, es decir, con la intersección de las regiones.

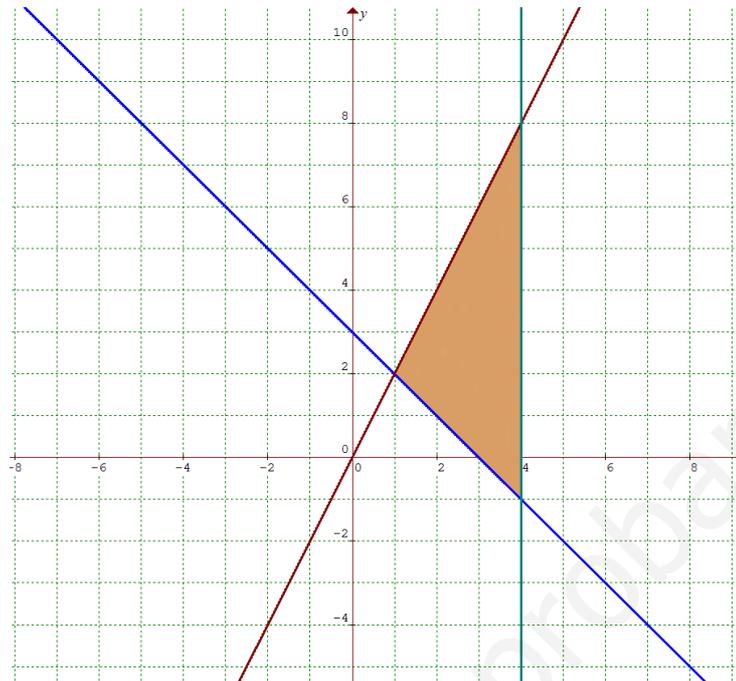
$$x + y \geq 3 \Rightarrow y \geq 3 - x$$

$$2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2x$$

$$x \leq 4$$



Luego la solución del sistema será la región coloreada en la gráfica siguiente, incluyendo los puntos que están sobre las rectas:



Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) 1 - \log x = \log(2x - 3) + \log(x + 3)$$

$$b) 3^{2-x} + 3^{x+1} = 28$$

Solución:

$$a) 1 - \log x = \log(2x - 3) + \log(x + 3) \Rightarrow 1 = \log x + \log(2x - 3) + \log(x + 3) \Rightarrow 1 = \log[x(2x - 3)(x + 3)] \Rightarrow \\ \Rightarrow x(2x - 3)(x + 3) = 10 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & -9 & -10 \\ & & -2 & -1 & 10 \\ \hline & 2 & 1 & -10 & 0 \\ 2 & & 4 & 10 & \\ \hline & 2 & 5 & 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(2x+5) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -\frac{5}{2} \end{array} \right.$$

$$b) 3^{2-x} + 3^{x+1} = 28 \Rightarrow \frac{3^2}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 28 \quad (\text{cambio de variable } 3^x = t) \Rightarrow \frac{9}{t} + 3t = 28 \Rightarrow 9 + 3t^2 = 28t$$

$$3t^2 - 28t + 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{6} = \frac{28 \pm \sqrt{676}}{6} = \frac{28 \pm 26}{6} \Rightarrow \begin{cases} t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 40 \\ 2^x \cdot 2^y = 1024 \end{cases}$$

Solución:

$$a) \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{7xy}{xy} \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 7xy \\ x = 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow 3(2y+1) + 2y = 7(2y+1)y$$

$$\Rightarrow 6y + 3 + 2y = 14y^2 + 7y \Rightarrow 14y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{28} = \frac{1 \pm 13}{28} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\text{soluciones: } \begin{cases} y = \frac{1}{2}, x = 2 \\ y = -\frac{3}{7}, x = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 40 \\ 2^x \cdot 2^y = 1024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log[(x+y)(x-y)] = \log 40 \\ 2^{x+y} = 2^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y) = 40 \\ x+y = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ y = 10 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - (10-x)^2 = 40 \Rightarrow x^2 - (100 - 20x + x^2) = 40 \Rightarrow 20x = 140 \Rightarrow x = 7$$

$$\text{solución: } \{x = 7, y = 3\}$$